

一个二元多项式的 Mahler 测度*

张安豪[†], 唐国平

(中国科学院大学数学科学学院, 北京 100049)

(2022 年 4 月 25 日收稿; 2022 年 6 月 8 日收修改稿)

Zhang A H, Tang G P. Mahler measure of a two-variable polynomial[J]. Journal of University of Chinese Academy of Sciences, 2024, 41(2): 145-150. DOI: 10.7523/j.ucas.2022.060.

摘要 将一个二元多项式 $P(x, y) = (x^2 + 1)y^2 + 2(x^2 + x)y + x(x^2 + 1)$ 的 Mahler 测度表达成一些 Bloch-Wigner 双对数函数的线性和, 进而得到其与 χ_{-3} 的 L 函数特殊值的有理倍数关系: $m(P(x, y)) = \frac{5}{2}L'(\chi_{-3}, -1)$ 。

关键词 Mahler 测度; Bloch-Wigner 双对数函数; L 函数特殊值

中图分类号: O154.3 **文献标志码**: A **DOI**: 10.7523/j.ucas.2022.060

Mahler measure of a two-variable polynomial

ZHANG Anhao, TANG Guoping

(School of Mathematical Sciences, University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China)

Abstract In this paper, we express the Mahler measure of a two-variable polynomial $P(x, y) = (x^2 + 1)y^2 + 2(x^2 + x)y + x(x^2 + 1)$ as a linear sum of some Bloch-Wigner Dilogarithm functions. and prove that the Mahler measure of $P(x, y)$ is rationally proportional to $L'(\chi_{-3}, -1)$: $m(P(x, y)) = \frac{5}{2}L'(\chi_{-3}, -1)$.

Keywords Mahler measure; Bloch-Wigner dilogarithm functions; special values of L -functions

对如下的二元多项式 $P(x, y) = (x^2 + 1)y^2 + 2(x^2 + x)y + x(x^2 + 1)$, 利用双对数函数给出其 Mahler 测度的一些计算结果。

首先, 对 $P(x, y) = 0$ 所定义的亏格为 2 的代数曲线 C 作变换, 使其与某一亏格为 0 的有理曲线建立联系。

1 双有理变换 φ 和商映射 f

首先, 对曲线 $C: (x^2 + 1)y^2 + (2x^2 + 2x)y +$

$x(x^2 + 1) = 0$ 作双有理变换 φ :

$$x = \frac{x_1 + 1}{x_1 - 1} \leftrightarrow x_1 = \frac{x + 1}{x - 1},$$

$$y = \frac{y_1 - x_1(x_1^2 - 1)}{(x_1^2 + 1)(x_1 - 1)} \leftrightarrow$$

$$y_1 = \frac{4[(x^2 + 1)y + x^2 + x]}{(x - 1)^3}.$$

化为曲线 C_1 , 其方程为 $C_1: y_1^2 + 3x_1^4 - 2x_1^2 - 1 = 0$ 。

φ 是曲线 C 到曲线 C_1 之间的双有理等价。

* 国家自然科学基金(11771422)资助

[†] 通信作者, E-mail: zhanganhao19@mails.ucas.ac.cn

在此对应下,曲线 C 的自同构 $\sigma:(x,y)\mapsto(1/x,1/y)$ 对应着曲线 C_1 的自同构 $\sigma_1:(x_1,y_1)\mapsto(-x_1,y_1)$ 。

接下来,对曲线 C_1 再作商映射

$$f:C_1\rightarrow C_1/\langle\sigma_1\rangle,$$

$$(x_1,y_1)\mapsto(x_2,y_2)=(x_1^2,y_1),$$

得到商曲线 $C_2=C_1/\langle\sigma_1\rangle$,其方程为 $C_2:y_2^2+3x_2^2-2x_2-1=0$ 。曲线 C_2 是一条亏格为 0 的有理曲线。

2 临界点分析

考察曲线 C 的以 y 为变元的方程的 2 个根

$$y_{\pm}=\frac{-2x^2-2x\pm\sqrt{-4x(x^2+x+1)(x-1)^2}}{2(x^2+1)}=\\ \frac{x^{\frac{3}{2}}}{x}\cdot\\ \frac{-2x^{\frac{1}{2}}-2x^{-\frac{1}{2}}\pm\sqrt{-4\left(x+\frac{1}{x}+1\right)\left(x+\frac{1}{x}-2\right)}}{2\left(x+\frac{1}{x}\right)}.$$

对上式作变量替换 $x(s)=e^{2\pi is},s\in[-1/2,1/2]$ 。进而上式可化为 $y_{\pm}=$

$$e^{\pi is}\frac{-4\cos(\pi s)\pm\sqrt{-4(2\cos(2\pi s)+1)(2\cos(2\pi s)-2)}}{4\cos(2\pi s)}.$$

下面考察 y_{\pm} 模长为 1 的情况,即上式中根号下的部分为零时的情况: $-4(2\cos(2\pi s)+1)(2\cos(2\pi s)-2)=-64\cos^4(\pi s)+80\cos^2(\pi s)-16=0$,求解此方程可得 $\cos(\pi s)=1,-1,-1/2,1/2$ 。考虑到参数化的取值范围是 $s\in[-1/2,1/2]$,所以只能有 $\cos(\pi s)=1$ 或 $1/2$,这分别对应着 $s=0$ 或 $\pm 1/3$ 。在区间 $s\in[-1/2,1/2]$ 上观察分析上面函数的图像易知,临界点为曲线 C 上 s 取 $-1/3,0,1/3$ 时相对应的点。

沿用前面的记号,对有理曲线 C_2 作如下的参数化。

$$\begin{cases}x_2=\frac{t^2-1}{t^2+3},\\y_2=\frac{-4t}{t^2+3}.\end{cases}$$

由曲线 C 和曲线 C_2 之间的关系易知: $x_2=(\frac{x+1}{x-1})^2=-\frac{1}{\tan^2(\pi s)}=\frac{t^2-1}{t^2+3}$ 。当 $s=\pm\frac{1}{3}$ 时,由

$$\frac{t^2-1}{t^2+3}=\pm\frac{1}{3}\text{解得 }t=0;\text{ 当 }s=0\text{ 时,}\lim_{s\rightarrow 0}x_2\rightarrow-\infty,$$

这对应着 $t^2+3=0$,即 $t=\pm\sqrt{3}i$ 。通过代入原曲线 C 的方程可知,这对应着原曲线 C 的一个奇点 $(1,-1)$ 。

3 Mahler 测度的双对数表达式

二元多项式的 Mahler 测度因与 L 函数特殊值有关而成为研究的热点。想计算一个多元多项式的 Mahler 测度十分困难,甚至对于一般的二元多项式也并不容易。对于一些特定的二元多项式,有一些方法可以计算其 Mahler 测度,本文研究的多项式 $P(x,y)=(x^2+1)y^2+2(x^2+x)y+x(x^2+1)$ 便是其中之一。

我们研究的这个多项式来自于文献[1]中给出的一族多项式 $P_k(x,y)=(x^2+1)y^2+(kx^2+kx)y+x(x^2+1)$ 在 $k=2$ 时的情形,此时根据他们的结果,可以猜测 $m(P)=\frac{5}{2}L'(\chi_{-3},-1)$ 成立。本文利用双对数函数计算上面二元多项式 $P(x,y)$ 的 Mahler 测度,并证明上面的等式成立。

由第 1 节和第 2 节的分析知,将此多项式所定义的亏格为 2 的曲线 C 与一条亏格为 0 的有理曲线 C_2 建立了联系。由于曲线 C_2 的亏格为 0,其整 K_2 群是挠的,故无法借助于其 K_2 群来建立它的 Mahler 测度与 L 函数特殊值之间的关系,这也是本文研究的多项式 $P(x,y)$ 与绝大多数研究情形的不同之处。对于一般情形的研究,可以参考文献[2-4]。

下面简单介绍 Mahler 测度和双对数函数的定义。

一个 n 变元非零多项式 $P\in\mathbb{C}[x_1^{\pm 1},\cdots,x_n^{\pm 1}]$ 的 Mahler 测度定义为

$$m(P):=\frac{1}{(2\pi i)^n}\int_{\mathbb{T}^n}\log|P(x_1,\cdots,x_n)|\frac{dx_1}{x_1}\cdots\frac{dx_n}{x_n},\\ \mathbb{T}^n:=\{(z_1,\cdots,z_n)\in\mathbb{C}^n:|z_1|=\cdots=|z_n|=1\},\text{ 它是 }n\text{ 维环面。对于本文研究的这个特定二元多项式 }P(x,y)\in\mathbb{Q}(x,y)\text{ 的 Mahler 测度,根据文献 [3] 中的讨论,其可写成如下形式: }m(P)=\frac{1}{2\pi}\int_{\gamma}\eta(x,y),\text{ 这里 }\eta(x,y):=\log|y|\text{ darg}x-\log| x|\text{ darg}y\text{ 是一个微分 1-形式, }x,y\in\mathbb{Q}(C)\text{ 视为曲线 }C\text{ 的有理函数域中的函数。这里 }\gamma=\{(x,y)\in C:|x|=1,|y|\geq 1\}\text{ 也称为 Deninger$$

路径。实际上,设由多项式 $P(x,y)=0$ 定义的代数曲线 C 的完备非奇异模型为 \tilde{C} 。将 $M(\tilde{C})$ 看作由 \tilde{C} 上的全体实亚纯微分 1-形式所组成的 \mathbb{Q} 向量空间时, η 可视为映射: $\eta: \wedge^2_{\mathbb{Q}}(C)^* \otimes \mathbb{Q} \rightarrow M(\tilde{C})$, 对 η 详细的解释见文献[3]。

定义 Bloch-Wigner 双对数为

$$D(z) := \log |z| \arg(1-z) - \operatorname{Im} \left(\int_0^z \frac{\log(1-t)}{t} dt \right) \\ = \log |z| \arg(1-z) + \operatorname{Im} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2} \right),$$

可将其看作定义在 $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ 上的实值连续函数, 详细解释见文献[2]。本文更多用到的是模长为 1 的情形: $D(e^{i\theta}) = - \int_0^\theta \log |1 - e^{it}| dt = \operatorname{Im} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in\theta}}{n^2} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\theta)}{n^2}$ 。由定义易知,

Bloch-Wigner 双对数和微分 η 之间有如下关系式 $dD(z) = \eta(z, 1-z)$ 。(1)

本文后面的计算中使用了一些常用的双对数恒等式, 这些恒等式及其证明详见文献[2, 5]。由第 1 节中的变换 φ 及文献[2]中的讨论知

$$m(P) = - \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} \eta(x,y) = \\ - \frac{1}{2\pi} \int_{\varphi \circ \gamma} \eta(x(x_1,y_1), y(x_1,y_1)) = \\ - \frac{1}{4\pi} \int_{\varphi \circ \gamma} (\eta(x(x_1,y_1), y(x_1,y_1)) + \\ \eta(\sigma x(x_1,y_1), \sigma y(x_1,y_1))),$$

其中 γ 是上面定义的 Deninger 路径。

回忆有理曲线 C_2 参数化, 根据文献[2]中的方法, 可找到有理函数 a, b :

$$\left\{ \begin{aligned} a(x_1,y_1) &= - \frac{x_1^2 - y_1 - 1}{x_1^2 + y_1 - 1} = - \frac{x_2 - y_2 - 1}{x_2 + y_2 - 1} \\ &= \frac{t-1}{t+1}, \\ b(x_1,y_1) &= - \frac{2(x_1^2 + 1)}{x_1^2 + y_1 - 1} = - \frac{2(x_2 + 1)}{x_2 + y_2 - 1} \\ &= \frac{t^2 + 1}{t+1}, \end{aligned} \right.$$

使得 $a(x_1^2, y_1)x(x_1, y_1) + b(x_1^2, y_1)y(x_1, y_1) = 1$ 成立。将 a, x, y 视作曲线 C 的函数域 $\mathbb{Q}(C)$ 中的函数, 在 $\wedge^2_{\mathbb{Q}}(C)^* \otimes \mathbb{Q}$ 中有下面式子成立:

$$(ax) \wedge (1-ax) = (ax) \wedge (by) =$$

$$a \wedge b + a \wedge y + x \wedge b + x \wedge y. \tag{2}$$

将 σ 作用在式(2)上可得

$$\left(\frac{a}{x}\right) \wedge \left(1 - \frac{a}{x}\right) \\ = a \wedge b - a \wedge y - x \wedge b + x \wedge y. \tag{3}$$

将式(2)与式(3)相加得 $(ax) \wedge (1-ax) + \left(\frac{a}{x}\right) \wedge \left(1 - \frac{a}{x}\right) - 2a \wedge b = 2x \wedge y = x \wedge y + \sigma x \wedge \sigma y$ 。再结合关系式(1)可将 Mahler 测度化为下面形式

$$m(P) = - \frac{1}{4\pi} \left(\epsilon_1 \int_{\gamma} dD(ax) + \epsilon_1 \int_{\gamma} dD\left(\frac{a}{x}\right) - \right. \\ \left. 2\epsilon_2 \int_{\varphi \circ \gamma} \eta(a(x_2,y_2), b(x_2,y_2)) \right) = \\ - \frac{1}{4\pi} \left[\epsilon_1 \int_{\gamma} dD(ax) + \epsilon_1 \int_{\gamma} dD\left(\frac{a}{x}\right) - \right. \\ \left. 2\epsilon_2 \int_{\varphi \circ \gamma} \eta\left(\frac{t-1}{t+1}, \frac{t^2+1}{t+1}\right) \right],$$

其中: $\epsilon_k = 1$ 或 $-1, k = 1, 2$, 后面将确定 ϵ_k 的值。记积分

$$I_1 := - \frac{\epsilon_1}{4\pi} \left(\int_{\gamma} dD(ax) + \int_{\gamma} dD\left(\frac{a}{x}\right) \right), \\ I_2 := \frac{\epsilon_2}{2\pi} \int_{\varphi \circ \gamma} \eta\left(\frac{t-1}{t+1}, \frac{t^2+1}{t+1}\right),$$

那么可以将 Mahler 测度 $m(P)$ 写成两个部分即 I_1 与 I_2 的和: $m(P) = I_1 + I_2$ 。为进一步将 Mahler 测度表示成一些双对数函数值的线性和, 只需要将 I_1 和 I_2 分别表示成一些双对数函数值的线性和即可。由 Stokes 公式知, I_1 已经是一些 Bloch-Wigner 双对数函数值的线性和的形式, 只需要分析 Deninger 路径的端点处的双对数函数值即可, 这对应着第 4 节的结果; 利用一些双对数关系可将 I_2 表达成双对数函数的线性和的形式, 这对应着第 5 节的结果。

4 计算积分 I_1

记 $\Delta(x) = -4x(x^2 + x + 1)(x - 1)^2$, 考察 $\sqrt{\Delta(x)}$ 。取连接 3 次本原单位根 ζ_3 和其共轭 $\bar{\zeta}_3$ 的线段作为割线, 这也对应着沿正实轴取连接 0 到无穷远点的射线作为割线, 由于 $\Delta(e^{\frac{\pi}{3}i}) = -8$, 可取 $\sqrt{-8} = 2\sqrt{2}i$ 所定义的解析分支进行计算。通过简单分析可得, 积分的 Deninger 路径正对应于参数化 $x(s) = e^{2\pi is}$ 中取值 $s \in [-1/3, 1/3]$ 的这段。

回忆之前的参数替换 $x(s) = e^{2\pi is}$ 及有理函数 a 的表达式,由 Stokes 公式得

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} dD(ax) &= D(ax) \Big|_{s=\frac{1}{3}} - \lim_{s \rightarrow 0^+} D(ax) + \\ &\quad \lim_{s \rightarrow 0^-} D(ax) - D(ax) \Big|_{s=-\frac{1}{3}} \\ &= 2D(-\zeta_3) - 2D(\zeta_6), \\ \int_{\gamma} dD\left(\frac{a}{x}\right) &= D\left(\frac{a}{x}\right) \Big|_{s=\frac{1}{3}} - \lim_{s \rightarrow 0^+} D\left(\frac{a}{x}\right) + \\ &\quad \lim_{s \rightarrow 0^-} D\left(\frac{a}{x}\right) - D\left(\frac{a}{x}\right) \Big|_{s=-\frac{1}{3}} \\ &= 2D(-\bar{\zeta}_3) - 2D(\zeta_6). \end{aligned}$$

代入 I_1 中得

$$\begin{aligned} I_1 &= -\frac{\epsilon_1}{4\pi} \left(\int_{\gamma} dD(ax) + \int_{\gamma} dD\left(\frac{a}{x}\right) \right) = \\ &= -\frac{\epsilon_1}{4\pi} (2D(-\zeta_3) + 2D(-\bar{\zeta}_3) - 4D(\zeta_6)) = \frac{\epsilon_1}{\pi} D(\zeta_6). \end{aligned}$$

由双对数函数的定义以及狄利克雷特征 χ_{-3} 的定义

$$\chi_{-3}(n) := \begin{cases} 0, & n \equiv 0 \pmod{3}; \\ 1, & n \equiv 1 \pmod{3}; \\ -1, & n \equiv -1 \pmod{3}. \end{cases}$$

$$\text{可得 } D(\zeta_3) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{2n\pi}{3}\right)}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\chi_{-3}(n)}{n^2} =$$

$\frac{\sqrt{3}}{2}L(\chi_{-3}, 2) = \frac{2\pi}{3}L'(\chi_{-3}, -1)$ 。除此之外,本原单位根 ζ_3 和 ζ_6 的双对数之间有关系式 $2D(\zeta_6) = 3D(\zeta_3)$ 成立。综上可得

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{\epsilon_1}{\pi} D(\zeta_6) = \frac{\epsilon_1}{\pi} \cdot \frac{3}{2} D(\zeta_3) = \\ &= \frac{3\epsilon_1}{2\pi} \cdot \frac{2\pi}{3} L'(\chi_{-3}, -1) \\ &= \epsilon_1 L'(\chi_{-3}, -1), \end{aligned}$$

这里 $\epsilon_1 = \pm 1$ 与第 3 节中相同。

5 计算积分 I_2

本节处理积分 I_2 , 利用双对数恒等关系式将 I_2 表达成 Bloch-Wigner 双对数函数值之和的形式。

沿用之前的记号,对 I_2 考察下面的等式

$$\begin{aligned} \frac{t-1}{t+1} \wedge \frac{t^2+1}{t+1} = \\ -(t+1) \wedge (t-1) - (t^2+1) \wedge \frac{t-1}{t+1}. \end{aligned}$$

由 $(t+1)^2 - (t-1)^2 = 2t$ 可得 $\frac{t^2+1}{2t} + \left(-\frac{(t-1)^2}{2t}\right) = 1$, 所以

$$\begin{aligned} \frac{t^2+1}{2t} \wedge \left(1 - \frac{t^2+1}{2t}\right) &= \frac{t^2+1}{2t} \wedge \\ &\quad \left(-\frac{(t-1)^2}{2t}\right) = 2(t^2+1) \wedge (t-1) - \\ &\quad (t^2+1) \wedge t - 2t \wedge (t-1). \end{aligned} \tag{4}$$

由 $(t^2+1) - (t+1)^2 = -2t$ 可得 $\left(-\frac{t^2+1}{2t}\right) + \frac{(t+1)^2}{2t} = 1$, 所以

$$\begin{aligned} \left(-\frac{t^2+1}{2t}\right) \wedge \left(1 + \frac{t^2+1}{2t}\right) &= \left(-\frac{t^2+1}{2t}\right) \wedge \\ &\quad \left(\frac{(t+1)^2}{2t}\right) = 2(t^2+1) \wedge (t+1) - (t^2+1) \wedge \\ &\quad t - 2t \wedge (t+1). \end{aligned} \tag{5}$$

用式(4)减去式(5)得

$$\begin{aligned} \frac{t^2+1}{2t} \wedge \left(1 - \frac{t^2+1}{2t}\right) - \left(-\frac{t^2+1}{2t}\right) \wedge \\ \left(1 + \frac{t^2+1}{2t}\right) &= 2(t^2+1) \wedge \frac{t-1}{t+1} - 2t \wedge \\ &\quad (t-1) + 2t \wedge (t+1). \end{aligned}$$

移项可得

$$\begin{aligned} 2(t^2+1) \wedge \frac{t-1}{t+1} &= \frac{t^2+1}{2t} \wedge \left(1 - \frac{t^2+1}{2t}\right) - \\ &\quad \left(-\frac{t^2+1}{2t}\right) \wedge \left(1 + \frac{t^2+1}{2t}\right) + \\ &\quad 2t \wedge (t-1) - 2t \wedge (t+1). \end{aligned} \tag{6}$$

利用 Bloch-Wigner 双对数和微分 η 的关系式(1)以及恒等式

$$\begin{aligned} (t-a) \wedge (t-b) &= \left(\frac{t-a}{b-a}\right) \wedge \left(1 - \frac{t-a}{b-a}\right) + \\ &\quad (t-a) \wedge (a-b) - (t-b) \wedge (b-a). \end{aligned}$$

可将式(6)写成如下形式

$$\begin{aligned} 2\eta\left(t^2+1, \frac{t-1}{t+1}\right) &= dD\left(\frac{t^2+1}{2t}\right) - dD\left(-\frac{t^2+1}{2t}\right) + \\ &\quad 2dD\left(\frac{t}{1}\right) - 2dD\left(\frac{t}{-1}\right). \end{aligned}$$

上式两边关于路径 $f^\circ \varphi^\circ \gamma$ 求积分

$$\begin{aligned} 2 \int_{f^\circ \varphi^\circ \gamma} \eta\left(t^2+1, \frac{t-1}{t+1}\right) &= \int_{f^\circ \varphi^\circ \gamma} \left(dD\left(\frac{t^2+1}{2t}\right) - \right. \\ &\quad \left. dD\left(-\frac{t^2+1}{2t}\right) + 2dD\left(\frac{t}{1}\right) - 2dD\left(\frac{t}{-1}\right) \right). \end{aligned}$$

由 Stokes 公式可得

$$\begin{aligned} &2\int_{f^{\circ}\varphi^{\circ}\gamma}\eta\left(t^2+1,\frac{t-1}{t+1}\right)=\\ &2\epsilon_2\left(D\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\mathbf{i}\right)-D\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\mathbf{i}\right)\right)+\\ &2\epsilon_2(2D(\sqrt{3}\mathbf{i})-2D(-\sqrt{3}\mathbf{i}))=\\ &6\epsilon_2\left(D\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\mathbf{i}\right)+D(\sqrt{3}\mathbf{i})\right). \end{aligned}$$

利用文献 [5] 中双对数的 Kummer 恒等关系式 $D(z)=\frac{1}{2}\left(D\left(\frac{z}{\bar{z}}\right)+D\left(\frac{1-1/z}{1-1/\bar{z}}\right)+D\left(\frac{1/(1-z)}{1/(1-\bar{z})}\right)\right)$ 可将 $D\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\mathbf{i}\right),D(\sqrt{3}\mathbf{i})$ 化为本原单位根 ζ_3,ζ_6 的双对数: $D\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\mathbf{i}\right)=\frac{1}{2}(D(\zeta_6)+D(\zeta_3)),D(\sqrt{3}\mathbf{i})=\frac{1}{2}(D(\zeta_6)+D(\zeta_3))$, 再结合关系式 $2D(\zeta_6)=3D(\zeta_3)$ 推得 $D\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\mathbf{i}\right)+D(\sqrt{3}\mathbf{i})=D(\zeta_6)+D(\zeta_3)=\frac{5}{2}D(\zeta_3)$, 代入原积分得

$$\int_{f^{\circ}\varphi^{\circ}\gamma}\eta\left(t^2+1,\frac{t-1}{t+1}\right)=\frac{15}{2}\epsilon_2D(\zeta_3).$$

由等式 $(t-1)\wedge(t+1)=\left(\frac{t-1}{-1-1}\right)\wedge\left(1-\frac{t-1}{-1-1}\right)+(t-1)\wedge(1-(-1))-(t+1)\wedge(-1-1)$ 和关系式 $D\left(\frac{1}{z}\right)=D(\bar{z})=-D(z)=D(1-z)$ 易得

$$\begin{aligned} \int_{f^{\circ}\varphi^{\circ}\gamma}\eta(t-1,t+1)&=2\epsilon_2D\left(\frac{1-\sqrt{3}\mathbf{i}}{2}\right)=\\ &2\epsilon_2D(e^{-\frac{\pi}{3}\mathbf{i}})=-2\epsilon_2D(e^{\frac{\pi}{3}\mathbf{i}})=\\ &-2\epsilon_2D(\zeta_6)=-3\epsilon_2D(\zeta_3). \end{aligned}$$

通过上面一系列的化简,现在可以将 I_2 化为本原单位根 ζ_3 的双对数值的有理系数倍,即

$$\begin{aligned} I_2&=\frac{\epsilon_2}{2\pi}\int_{f^{\circ}\varphi^{\circ}\gamma}\eta\left(\frac{t-1}{t+1},\frac{t^2+1}{t+1}\right)=\\ &-\frac{\epsilon_2}{2\pi}\int_{f^{\circ}\varphi^{\circ}\gamma}\eta(t-1,t+1)-\\ &\frac{\epsilon_2}{2\pi}\int_{f^{\circ}\varphi^{\circ}\gamma}\eta\left(t^2+1,\frac{t-1}{t+1}\right)= \end{aligned}$$

$$\frac{\epsilon_2}{2\pi}(3D(\zeta_3)-\frac{15}{2}D(\zeta_3))=-\frac{\epsilon_2}{2\pi}\cdot\frac{9}{2}D(\zeta_3).$$

再将 $D(\zeta_3)=\frac{2\pi}{3}L'(\chi_{-3},-1)$ 代入上式即得

$$I_2=-\frac{3}{2}\epsilon_2L'(\chi_{-3},-1),$$

这里 $\epsilon_2=\pm 1$ 与第 3 节中相同。

6 对计算结果的解释

通过第 4 节和第 5 节的计算,我们发现积分 I_1 和积分 I_2 的值都是 χ_{-3} 的 L 函数特殊值 $L'(\chi_{-3},-1)$ 的有理系数倍。

实际上,这种联系绝非偶然。根据文献[1]的数值结果,我们计算的这个多项式 $P(x,y)$ 的 Mahler 测度在数值上等于文献[6]所给出的 $m(x+y+1)$ 的 2.5 倍,这启发我们存在这样一个 Mahler 测度的关系式

$$m(P)=\frac{5}{2}m(x+y+1)=\frac{5}{2}L'(\chi_{-3},-1). \quad (7)$$

第 4 节和第 5 节的计算结果表明 $m(P)=I_1+I_2=\epsilon_1L'(\chi_{-3},-1)-\frac{3}{2}\epsilon_2L'(\chi_{-3},-1)$, 这里 $\epsilon_1=\pm 1,\epsilon_2=\pm 1$ 。对 ϵ_1,ϵ_2 的符号分情况讨论:

$$\begin{aligned} I_1+I_2&=\epsilon_1L'(\chi_{-3},-1)-\frac{3}{2}\epsilon_2L'(\chi_{-3},-1)=\\ &\begin{cases} L'(\chi_{-3},-1)-\frac{3}{2}L'(\chi_{-3},-1), \\ -L'(\chi_{-3},-1)-\frac{3}{2}L'(\chi_{-3},-1), \\ L'(\chi_{-3},-1)+\frac{3}{2}L'(\chi_{-3},-1), \\ -L'(\chi_{-3},-1)+\frac{3}{2}L'(\chi_{-3},-1), \end{cases} =\\ &\begin{cases} -\frac{1}{2}L'(\chi_{-3},-1), \\ -\frac{5}{2}L'(\chi_{-3},-1), \\ \frac{5}{2}L'(\chi_{-3},-1), \\ \frac{1}{2}L'(\chi_{-3},-1). \end{cases} \end{aligned}$$

结合式(7),可以确定 ϵ_1,ϵ_2 的值为

$$\epsilon_1=1,\epsilon_2=-1,$$

由此即得

$$m(P)=I_1+I_2=L'(\chi_{-3},-1)-\frac{3}{2}.$$

$$(-1)L'(\chi_{-3},-1)=\frac{5}{2}L'(\chi_{-3},-1).$$

至此已经计算出了多项式 $P(x,y)$ 的 Mahler 测度 $m(P)=\frac{5}{2}L'(\chi_{-3},-1)$ 。

参考文献

[1] Hang L, Qin H R. Mahler measure of families of polynomials defining genus 2 and 3 curves [J]. Experimental Mathematics, 2021; 1-16. DOI: 10.1080/10586458.2021.1926014.

[2] Bosman J. Boyd’s conjecture for a family of genus 2 curves [D]. Utrecht; Universiteit Utrecht,2004.

[3] Lalin M, Wu G. Regulator proofs for Boyd’s identities on genus 2 curves[J]. International Journal of Number Theory, 2019, 15(5): 945-967. DOI:10.1142/s1793042119500519.

[4] Lalin M, Wu G. The Mahler measure of a genus 3 family[J]. The Ramanujan Journal, 2021, 55 (1): 309-326. DOI: 10.1007/s11139-019-00241-1.

[5] Don Z. The dilogarithm function[M]//Frontiers in Number Theory, Physics, and Geometry II. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2007; 3-65. DOI:10.1007/978-3-540-30308-4_1.

[6] Smyth C J. On measures of polynomials in several variables [J]. Bulletin of the Australian Mathematical Society, 1981, 23(1): 49-63. DOI:10.1017/s0004972700006894.