

## 基于利率贴现模型的随机占优比较\*

庄玮玮<sup>1</sup>, 杜先杨<sup>1</sup>, 邱国新<sup>2†</sup>

(1 中国科学技术大学管理学院, 合肥 230026; 2 安徽新华学院商学院, 合肥 230088)

(2022年7月22日收稿; 2022年11月14日收修改稿)

Zhuang W W, Du X Y, Qiu G X. Stochastic dominance comparisons based on interest discount model[J]. Journal of University of Chinese Academy of Sciences, 2024, 41(4):433-441. DOI:10.7523/j.ucas.2022.086.

**摘要** 建立单笔投资的利率贴现模型按照一阶随机占优序、二阶随机占优序以及风险偏好型随机占优序递减的充分条件。若组合系数按超优序递减,投资组合情况下的利率贴现模型按照二阶随机占优序、风险偏好型随机占优序递减的充分条件也做了分析。

**关键词** 随机占优; 超优; 利率贴现模型; 投资组合

中图分类号:O211.5 文献标志码:A DOI:10.7523/j.ucas.2022.086

## Stochastic dominance comparisons based on interest discount model

ZHUANG Weiwei<sup>1</sup>, DU Xianyang<sup>1</sup>, QIU Guoxin<sup>2</sup>

(1 School of Management, University of Science and Technology of China, Hefei 230026, China;

2 School of Business, Xinhua University of Anhui, Hefei 230088, China)

**Abstract** The sufficient conditions for interest discount models increasing in the sense of the first-order stochastic dominance, the second-order stochastic dominance, and the risk-loving stochastic dominance were first given in this paper. We also obtained the sufficient conditions for weighted interest discount models increasing in the sense of the second-order stochastic dominance, and the risk-loving stochastic dominance when the weights decrease in the sense of the majorization order.

**Keywords** stochastic dominance; majorization; interest discount model; portfolios

若  $X$  代表投资,  $T$  代表投资周期,  $\delta$  表示折扣率, 则  $Xe^{-\delta T}$  表示投资  $X$  在  $T$  时刻贴现到当前时刻的现值收益。有的文献也称  $Xe^{-\delta T}$  为利率贴现模型。通过现值贴现, 可以将不同时刻的收益或者损失折现到当前时刻点, 从而有益于研究和比较。关于贴现模型的研究有许多, Goovaerts 等<sup>[1]</sup> 针对线性形式的随机变量, 给出贴现模型分布函数上界的近似值。Hu 和 Cheung<sup>[2]</sup>、Zhuang 等<sup>[3]</sup> 利用

贴现模型, 获得了特定条件下针对不同风险投保的保单限额和免赔额的最优分配权重。类似的研究还有很多, 如文献[4-8]。

随机占优理论由 Hardar 和 Russell<sup>[9]</sup>、Hanoch 和 Levy<sup>[10]</sup>、Rothschild 和 Stiglitz<sup>[11]</sup> 研究不确定性决策问题而提出。Hardar 和 Russell<sup>[9]</sup>、Hanoch 和 Levy<sup>[10]</sup> 分别建立了一阶随机占优和二阶随机占优理论。Hammond<sup>[12]</sup>、Meyer<sup>[13]</sup> 研究了风险偏好

\* 国家自然科学基金(71971204, 71871208, 11701518)和安徽省自然科学基金(1908085MG236, 2208085J43)资助

† 通信作者, E-mail: qingx02@ustc.edu.cn

型随机占优理论。随机占优理论可用于投资组合的比较,Hardar 和 Russell<sup>[14]</sup>、Tsfatsion<sup>[15]</sup>在二元情形下指出,若投资收益满足独立同分布条件,对于风险厌恶者而言,非负等权重的投资组合是最优选择,而仅仅投资于单一的项目是最差的选择。Li 和 Wong<sup>[16]</sup>将前者工作延伸至多元情形。Guo 和 Wong<sup>[17]</sup>基于特定形式的效用函数形式得到了一些关于风险厌恶型和风险偏好型的多元随机占优结果。

本文将贴现模型与随机占优理论进行结合,考虑时间因素对随机占优结果的影响,并基于几种常见的随机占优情形探究不同风险偏好投资者的决策行为。

1 定义与等价条件

1.1 随机占优

在介绍随机变量间的随机占优序定义之前,先对其支撑集做出如下假设。

假设 1.1 设随机变量  $X$  和  $Y$  的分布函数分别为  $F$  和  $G$ , 共同支撑为  $[a, b]$ , 其中  $-\infty < a \leq b < \infty$ , 当  $x \leq a$  时,  $F(x) = G(x) = 0$ ; 当  $x \geq b$  时  $F(x) = G(x) = 1$ 。

定义 1.1<sup>[18]</sup> 在假设 1.1 下,

a. 若对任意  $x \in [a, b]$ ,  $F(x) \leq G(x)$ , 且至少存在一个  $x_0 \in [a, b]$  使得不等式严格成立, 则称  $X$  一阶随机占优于  $Y$ , 记作  $X \geq_{\text{FSD}} Y$ 。

b. 若对任意  $x \in [a, b]$ ,  $\int_{-\infty}^x (G(t) - F(t))dt \geq 0$ , 且至少存在一个  $x_0 \in [a, b]$  使得不等式严格成立, 则称  $X$  二阶随机占优于  $Y$ , 记作  $X \geq_{\text{SSD}} Y$ 。

c. 若对任意  $x \in [a, b]$ ,  $\int_x^{\infty} (G(t) - F(t))dt \geq 0$ , 且至少存在一个  $x_0 \in [a, b]$  使得不等式严格成立, 则称  $X$  风险偏好型随机占优于  $Y$ , 记作  $X \geq_{\text{RSSD}} Y$ 。

易见,  $X \geq_{\text{FSD}} Y \Rightarrow X \geq_{\text{SSD}} Y, X \geq_{\text{FSD}} Y \Rightarrow X \geq_{\text{RSSD}} Y$ 。下面的引理 1.1 说明, 随机占优序与期望效用函数紧密相联。

引理 1.1<sup>[18]</sup> a.  $X \geq_{\text{FSD}} Y$  等价于, 对任意函数  $U \in U_1, E[U(X)] \geq E[U(Y)]$ , 且至少存在一个  $U_0 \in U_1$  使得不等式严格成立, 其中  $U_1 = \{U: U' \geq 0\}$ 。

b.  $X \geq_{\text{SSD}} Y$  等价于, 对任意函数  $U \in U_2, E[U(X)] \geq E[U(Y)]$ , 且至少存在一个  $U_0 \in$

$U_2$  使得不等式严格成立, 其中  $U_2 = \{U: U' \geq 0, U'' \leq 0\}$ 。

c.  $X \geq_{\text{RSSD}} Y$  等价于, 对任意函数  $U \in U_3, E[U(X)] \geq E[U(Y)]$ , 且至少存在一个  $U_0 \in U_3$  使得不等式严格成立, 其中  $U_3 = \{U: U' \geq 0, U'' \geq 0\}$ 。

1.2 超优

记  $I_n = \{(a_1, \dots, a_n)^T \in \mathbb{R}^n : a_1 \geq \dots \geq a_n\}$ 。若向量  $\alpha_n = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)^T \in I_n$  和  $\beta_n = (\beta_1, \dots, \beta_n)^T \in I_n$ , 满足

$\sum_{i=1}^k \alpha_i \leq \sum_{i=1}^k \beta_i, k = 1, \dots, n-1$ , 且  $\sum_{i=1}^n \alpha_i = \sum_{i=1}^n \beta_i$ 。则称  $\beta_n$  超优于  $\alpha_n$ , 记作  $\beta_n \geq_M \alpha_n$ 。

下面的引理 1.2 揭示, 被超优向量可以由超优向量经过有限次的  $T$  矩阵变换得到。

引理 1.2<sup>[19]</sup> 若  $\beta_n \geq_M \alpha_n$ , 则  $\alpha_n$  可由  $\beta_n$  经过至多  $n-1$  次  $T$  矩阵变换得到,  $T$  矩阵形式为  $T = \lambda I + (1-\lambda)Q, 1/2 \leq \lambda \leq 1$ 。其中  $I$  为单位矩阵,  $Q$  为交换两列元素的置换矩阵。

2 单笔投资的利率贴现模型比较

本节将建立  $Xe^{-\delta T}$  依不同占优序随机递减的充分条件。

定理 2.1 设  $X_1, X_2$  和  $T_1, T_2$  为 2 列非负随机变量,  $X_i$  与  $T_i$  独立,  $i = 1, 2$ 。对任意的  $\delta_2 \geq \delta_1 > 0$ , 若  $X_1 \geq_{\text{FSD}} X_2, T_1 \leq_{\text{FSD}} T_2$ , 则有  $X_1 e^{-\delta_1 T_1} \geq_{\text{FSD}} X_2 e^{-\delta_2 T_2}$ 。

证明 由  $T_1 \leq_{\text{FSD}} T_2$  以及定义 1.1 可得  $\delta_1 T_1 \leq_{\text{FSD}} \delta_1 T_2$ 。由于  $\delta_2 \geq \delta_1$ , 易证  $\delta_1 T_2 \leq_{\text{FSD}} \delta_2 T_2$ 。因此有  $\delta_1 T_1 \leq_{\text{FSD}} \delta_1 T_2 \leq_{\text{FSD}} \delta_2 T_2$ 。再注意到  $e^{-x}$  是递减函数, 于是

$$e^{-\delta_1 T_1} \geq_{\text{FSD}} e^{-\delta_1 T_2} \geq_{\text{FSD}} e^{-\delta_2 T_2}.$$

于是, 对任意的递增函数  $U(x) \in U_1$ ,

$$\begin{aligned} E[U(X_1 e^{-\delta_1 T_1})] &= E[E(U(X_1 e^{-\delta_1 T_1}) | X_1)] \\ &\geq E[E(U(X_1 e^{-\delta_2 T_2}) | X_1)] \\ &= E[U(X_1 e^{-\delta_2 T_2})]. \end{aligned} \tag{1}$$

又因为  $X_1 \geq_{\text{FSD}} X_2$ , 可以推出

$$\begin{aligned} E[U(X_1 e^{-\delta_2 T_2})] &= E[E(U(X_1 e^{-\delta_2 T_2}) | T_2)] \\ &\geq E[E(U(X_2 e^{-\delta_2 T_2}) | T_2)] \\ &= E[U(X_2 e^{-\delta_2 T_2})]. \end{aligned} \tag{2}$$

结合式 (1) 和式 (2) 可得  $E[U(X_1 e^{-\delta_1 T_1})] \geq$

$E[U(X_2e^{-\delta_2T_2})]$ 。故有  $X_1e^{-\delta_1T_1} \geq_{\text{FSD}} X_2e^{-\delta_2T_2}$ 。

定理 2.1 表明,在一阶随机占优情形下,若后者折现率大于前者,投资者更愿意选择收益更高、周期更短的投资。

**定理 2.2** 设  $X_1, X_2$  和  $T_1, T_2$  为 2 列非负随机变量,  $X_i$  与  $T_i$  独立,  $i = 1, 2$ 。对任意的  $\delta_2 \geq \delta_1 > 0$ , 若  $X_1 \geq_{\text{SSD}} X_2, T_1 \leq_{\text{FSD}} T_2$ , 则  $X_1e^{-\delta_1T_1} \geq_{\text{SSD}} X_2e^{-\delta_2T_2}$ 。

**证明** 因  $T_1 \leq_{\text{FSD}} T_2$ , 由定义 1.1 和  $\delta_2 \geq \delta_1 > 0$  可得,对任意的  $t \geq 0$ ,

$$\begin{aligned} P(\delta_1 T_1 \leq t) &= P\left(T_1 \leq \frac{t}{\delta_1}\right) \geq P\left(T_2 \leq \frac{t}{\delta_1}\right) \\ &\geq P\left(T_2 \leq \frac{t}{\delta_2}\right) = P(\delta_2 T_2 \leq t), \end{aligned}$$

这表明  $\delta_1 T_1 \leq_{\text{FSD}} \delta_2 T_2$ 。注意到  $e^{-x}$  是递减函数, 于是  $e^{-\delta_1 T_1} \geq_{\text{FSD}} e^{-\delta_2 T_2}$ , 进而可得  $e^{-\delta_1 T_1} \geq_{\text{SSD}} e^{-\delta_2 T_2}$ 。因此,对任意的增凹函数  $U(x) \in \mathbf{U}_2$ ,

$$\begin{aligned} E[U(X_1e^{-\delta_2T_2})] &= E[E(U(X_1e^{-\delta_2T_2}) | X_1)] \\ &\leq E[E(U(X_1e^{-\delta_1T_1}) | X_1)] \\ &= E[U(X_1e^{-\delta_1T_1})]. \end{aligned} \quad (3)$$

再由  $X_1 \geq_{\text{SSD}} X_2$  得

$$\begin{aligned} E[U(X_2e^{-\delta_2T_2})] &= E[E(U(X_2e^{-\delta_2T_2}) | T_2)] \\ &\leq E[E(U(X_1e^{-\delta_2T_2}) | T_2)] \\ &= E[U(X_1e^{-\delta_2T_2})]. \end{aligned} \quad (4)$$

结合式(3)和式(4),对任意的  $U(x) \in \mathbf{U}_2$ , 有

$$E[U(X_1e^{-\delta_1T_1})] \geq E[U(X_2e^{-\delta_2T_2})],$$

即有  $X_1e^{-\delta_1T_1} \geq_{\text{SSD}} X_2e^{-\delta_2T_2}$ 。□

定理 2.2 揭示,在二阶随机占优意义下,投资者更偏好周期短且风险小的投资。

**定理 2.3** 设  $X_1, X_2$  和  $T_1, T_2$  为 2 列非负随机变量,  $X_i$  与  $T_i$  独立,  $i = 1, 2$ 。对任意的  $\delta_2 \geq \delta_1 > 0$ , 若以下条件之一成立,则有  $X_1e^{-\delta_1T_1} \geq_{\text{RSSD}} X_2e^{-\delta_2T_2}$ 。

(a)  $X_1 \geq_{\text{RSSD}} X_2, T_1 \leq_{\text{SSD}} T_2$ ; (b)  $X_1 \geq_{\text{RSSD}} X_2, T_1 \leq_{\text{FSD}} T_2$ ; (c)  $X_1 \geq_{\text{FSD}} X_2, T_1 \leq_{\text{SSD}} T_2$ 。

**证明** 仅给出条件(a)的证明,条件(b)和(c)的证明类似,故略去。若  $T_1 > 0$  时,则对任意的  $x > 0$ ,

$$\begin{aligned} \frac{\int_{-\infty}^x P(\delta_1 T_1 \leq u) du}{\int_{-\infty}^x P(\delta_2 T_1 \leq u) du} &= \frac{\delta_1 \int_{-\infty}^{x/\delta_1} P(T_1 \leq u) du}{\delta_2 \int_{-\infty}^{x/\delta_2} P(T_1 \leq u) du} \\ &= \frac{\delta_1 \int_0^{x/\delta_1} P(T_1 \leq u) du}{\delta_2 \int_0^{x/\delta_2} P(T_1 \leq u) du}. \end{aligned}$$

注意到  $\delta_2 \geq \delta_1 > 0$ , 进一步可以得

$$\begin{aligned} \frac{\int_{-\infty}^x P(\delta_1 T_1 \leq u) du}{\int_{-\infty}^x P(\delta_2 T_1 \leq u) du} &= \frac{\int_0^{x/\delta_1} P(T_1 \leq u) du}{\int_0^{x/\delta_2} P(T_1 \leq u) du} \\ &= \frac{\delta_1}{\delta_2} \left[ 1 + \frac{\int_{x/\delta_2}^{x/\delta_1} P(T_1 \leq u) du}{\int_0^{x/\delta_2} P(T_1 \leq u) du} \right] \\ &\geq \frac{\delta_1}{\delta_2} \left[ 1 + \frac{\int_{x/\delta_2}^{x/\delta_1} P(T_1 \leq x/\delta_2) du}{\int_0^{x/\delta_2} P(T_1 \leq x/\delta_2) du} \right] \\ &= \frac{\delta_1}{\delta_2} \left[ 1 + \frac{P(T_1 \leq x/\delta_2) \frac{\delta_2 - \delta_1}{\delta_2 \delta_1} x}{P(T_1 \leq x/\delta_2) \frac{1}{\delta_2} x} \right] \\ &= \frac{\delta_1}{\delta_2} \left[ 1 + \frac{\delta_2 - \delta_1}{\delta_1} \right] = 1. \end{aligned}$$

因此,对任意的  $x > 0$ , 都有

$$\int_{-\infty}^x P(\delta_1 T_1 \leq u) du \geq \int_{-\infty}^x P(\delta_2 T_1 \leq u) du,$$

即  $\delta_1 T_1 \leq_{\text{SSD}} \delta_2 T_1$ , 进而由文献[20]中的定理 4. A. 1 得  $-\delta_1 T_1 \geq_{\text{RSSD}} -\delta_2 T_1$ 。同理,由条件  $T_1 \leq_{\text{SSD}} T_2$  可知  $-\delta_2 T_1 \geq_{\text{RSSD}} -\delta_2 T_2$ 。因此  $-\delta_1 T_1 \geq_{\text{RSSD}} -\delta_2 T_2$ 。进而得  $e^{-\delta_1 T_1} \geq_{\text{RSSD}} e^{-\delta_2 T_2}$ , 则对任意的增凸函数  $U(x) \in \mathbf{U}_3$ ,

$$\begin{aligned} E[U(X_2e^{-\delta_1T_1})] &= E[E(U(X_2e^{-\delta_1T_1}) | X_2)] \\ &\geq E[E(U(X_2e^{-\delta_2T_2}) | X_2)] \\ &= E[U(X_2e^{-\delta_2T_2})]. \end{aligned} \quad (5)$$

类似地,由条件  $X_1 \geq_{\text{RSSD}} X_2$  得

$$\begin{aligned} E[U(X_1e^{-\delta_1T_1})] &= E[E(U(X_1e^{-\delta_1T_1}) | T_1)] \\ &\geq E[E(U(X_2e^{-\delta_1T_1}) | T_1)] \\ &= E[U(X_2e^{-\delta_1T_1})]. \end{aligned} \quad (6)$$

因此,对任意增凸函数  $U(x) \in \mathbf{U}_3$ , 成立

$$E[U(X_1e^{-\delta_1T_1})] \geq E[U(X_2e^{-\delta_2T_2})].$$

若  $T_1 = 0$  时,由  $e^{-\delta_1 T_1} = 1 \geq_{\text{FSD}} e^{-\delta_2 T_2}$  可推出  $1 \geq_{\text{RSSD}} e^{-\delta_2 T_2}$ 。重复上面的证明过程,仍有  $X_1e^{-\delta_1 T_1} \geq_{\text{RSSD}} X_2e^{-\delta_2 T_2}$ 。□

由于非负独立随机变量的随机占优关系关于卷积封闭<sup>[20]</sup>,于是有如下推论。

**推论 2.1** 设  $\{X_1, \dots, X_n\}$  和  $\{Y_1, \dots, Y_n\}$  为 2 列非负独立随机变量,  $\{T_1, \dots, T_n\}$  和  $\{S_1, \dots,$

$S_n\}$  为另外 2 列非负独立随机变量,且  $\{X_1,\cdots, Y_n\}$  与  $\{T_1,\cdots,T_n\}$  独立,  $\{Y_1,\cdots,Y_n\}$  与  $\{S_1,\cdots, S_n\}$  独立,

- a. 若  $X_i \geq_{\text{FSD}} Y_i, T_i \leq_{\text{FSD}} S_i$ , 且  $\delta'_i \geq \delta_i > 0, i = 1, \cdots, n$ , 则有  $\sum_{i=1}^n X_i e^{-\delta_i T_i} \geq_{\text{FSD}} \sum_{i=1}^n Y_i e^{-\delta_i S_i}$ 。
- b. 若  $X_i \geq_{\text{SSD}} Y_i, T_i \leq_{\text{FSD}} S_i$ , 且  $\delta'_i \geq \delta_i > 0, i = 1, \cdots, n$ , 则有  $\sum_{i=1}^n X_i e^{-\delta_i T_i} \geq_{\text{SSD}} \sum_{i=1}^n Y_i e^{-\delta_i S_i}$ 。
- c. 若  $X_i \geq_{\text{RSSD}} Y_i, T_i \leq_{\text{SSD}} S_i$ , 且  $\delta'_i \geq \delta_i > 0, i = 1, \cdots, n$ , 则有  $\sum_{i=1}^n X_i e^{-\delta_i T_i} \geq_{\text{RSSD}} \sum_{i=1}^n Y_i e^{-\delta_i S_i}$ 。

3 投资组合下的利率贴现模型比较

将  $X_i$  视为第  $i$  笔投资,  $T_i$  为第  $i$  笔投资的回报时间,  $\delta_i$  为其贴现率,则  $S = \sum_{i=1}^n X_i e^{-\delta_i T_i}$  为总投资贴现值。推论 2.1 揭示了投保人在随机占优意义下,面对不同情形做出的投资选择。若投资  $X_1$  和  $X_2$  独立同分布, Hanoch 和 Levy<sup>[10]</sup>、Hadar 和 Russell<sup>[14]</sup> 以及 Tsefatson<sup>[15]</sup> 证明了

$$\frac{1}{2}X_1 + \frac{1}{2}X_2 \geq_{\text{SSD}} \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 \geq_{\text{SSD}} X_i, \quad i = 1, 2.$$

考虑一系列投资的非负凸组合  $\sum_{i=1}^n \lambda_i X_i$ , 其权重向量  $\lambda_n = (\lambda_1, \cdots, \lambda_n)^T \in S_n$ 。其中

$$S_n = \{ (s_1, \cdots, s_n)^T : 0 \leq s_i \leq 1, \sum_{i=1}^n s_i = 1 \}.$$

Li 和 Wong<sup>[16]</sup> 得到如下引理 3.1。

引理 3.1<sup>[16]</sup> 若  $\{X_1, \cdots, X_n\}$  为一列独立同分布随机变量,若  $\alpha_n = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)^T \in S_n$ , 则有

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \geq_{\text{SSD}} \sum_{i=1}^n \alpha_i X_i \geq_{\text{SSD}} X_i, \quad i = 1, 2, \cdots, n.$$

对于不同权重的投资组合, Egozcue 和 Wong<sup>[21]</sup> 借助超优序得到如下引理 3.2。

引理 3.2<sup>[21]</sup> 设  $\{X_1, \cdots, X_n\}$  为一列独立同分布随机变量,  $\alpha_n = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)^T \in S_n, \beta_n = (\beta_1, \cdots, \beta_n)^T \in S_n$ 。若  $\alpha_n \geq_{\text{M}} \beta_n$ , 则有  $\beta_n X_n \geq_{\text{SSD}} \alpha_n X_n$ 。

风险偏好型随机占优序也有类似的结果。

引理 3.3<sup>[17]</sup> 设  $\{X_1, \cdots, X_n\}$  为一列独立同分布随机变量,  $\alpha_n = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)^T \in S_n, \beta_n = (\beta_1, \cdots, \beta_n)^T \in S_n$ 。若  $\alpha_n \geq_{\text{M}} \beta_n$ , 则有  $\alpha_n X_n \geq_{\text{RSSD}} \beta_n X_n$ 。

将引理 3.2 和引理 3.3 中的  $X_i$  视为  $X_i e^{-\delta T_i}$ , 得到如下定理 3.1。

定理 3.1 设  $\{X_1, \cdots, X_n\}$  与  $\{T_1, \cdots, T_n\}$  为 2 列独立同分布的随机变量,且  $X_i$  与  $T_i$  独立,  $i = 1, \cdots, n$ 。向量  $\alpha_n \in S_n$  以及  $\beta_n \in S_n$ 。若  $\alpha_n \geq_{\text{M}} \beta_n$ , 则

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \beta_i X_i e^{-\delta T_i} &\geq_{\text{SSD}} \sum_{i=1}^n \alpha_i X_i e^{-\delta T_i}, \\ \sum_{i=1}^n \alpha_i X_i e^{-\delta T_i} &\geq_{\text{RSSD}} \sum_{i=1}^n \beta_i X_i e^{-\delta T_i}. \end{aligned}$$

对任意向量  $\alpha_n \in S_n$ , 由于始终成立

$$(1, 0, \cdots, 0)^T \geq_{\text{M}} \alpha_n \geq_{\text{M}} (1/n, 1/n, \cdots, 1/n)^T,$$
 利用定理 3.1 可得到如下结论。

定理 3.2 设  $\{X_1, \cdots, X_n\}$  与  $\{T_1, \cdots, T_n\}$  为 2 列独立同分布随机变量,且  $X_i$  与  $T_i$  独立,  $i = 1, \cdots, n$ 。若向量  $\alpha_n \in S_n$ , 则

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i e^{-\delta T_i} &\geq_{\text{SSD}} \sum_{i=1}^n \alpha_i X_i e^{-\delta T_i} \geq_{\text{SSD}} X_i, \\ X_i &\geq_{\text{RSSD}} \sum_{i=1}^n \alpha_i X_i e^{-\delta T_i} \geq_{\text{RSSD}} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i e^{-\delta T_i}. \end{aligned}$$

引理 3.2 和引理 3.3 中独立同分布的条件非常苛刻,该条件是否可以舍去? 下面的例 3.1 给出了答案。

例 3.1 设  $X_1$  和  $X_2$  独立,  $X_1 \sim N(0.5, 0.3^2)$ , 且  $X_2 \sim N(0.3, 0.4^2)$ 。向量  $\alpha_2, \beta_2 \in S_2$  满足  $\alpha_2 \geq_{\text{M}} \beta_2$ , 则

$$\begin{aligned} \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 &\sim N(0.2\alpha_1 + 0.3, \\ &0.16(1 - \alpha_1)^2 + 0.09\alpha_1^2), \\ \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 &\sim N(0.2\beta_1 + 0.3, \\ &0.16(1 - \beta_1)^2 + 0.09\beta_1^2). \end{aligned}$$

要使  $\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 \geq_{\text{SSD}} \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2$ , 需

$$\begin{cases} 0.2\alpha_1 + 0.3 \geq 0.2\beta_1 + 0.3, \\ 0.16(1 - \alpha_1)^2 + 0.09\alpha_1^2 \leq 0.16(1 - \beta_1)^2 + 0.09\beta_1^2. \end{cases}$$

即要求  $\alpha_1 \geq \beta_1$ , 且  $\alpha_1 + \beta_1 \leq 32/25$ 。若取向量  $\alpha_2 = (19/25, 6/25)$ ,  $\beta_2 = (16/25, 9/25)$ , 则不能满足上述要求。所以,引理 3.2 和引理 3.3 中独立同分布的条件是不可删去的。

在特殊情形下,可删去引理 3.2 中独立同分布的条件。为此,引入排列增(减)的概念。

定义 3.1<sup>[2]</sup> 对于函数  $g(x_1, \cdots, x_n)$ , 若对任意的  $1 \leq i < j \leq n$  满足

$$(x_i - x_j)(g(x_1, \cdots, x_i, \cdots, x_j, \cdots, x_n) - g(x_1, \cdots, x_j, \cdots, x_i, \cdots, x_n)) \leq (\geq) 0,$$

则称  $g(x_1, \cdots, x_n)$  为排列增(减)函数。

对于 SSD 序,我们可证如下引理 3.4。

**引理 3.4** 假定随机向量  $(X_1, \cdots, X_n)$  的联合概率密度函数  $f(x_1, \cdots, x_n)$  为排列增的,若

$$\alpha_n \geq_m \beta_n, \alpha_n, \beta_n \in S_n, \text{ 则 } \sum_{i=1}^n \beta_i X_i \geq_{SSD} \sum_{i=1}^n \alpha_i X_i。$$

**证明** 先证  $n = 2$  的情形。若向量  $\alpha_2, \beta_2 \in S_2$ , 且  $\alpha_2 \geq_m \beta_2$ , 则由超优序的定义得

$$\alpha_1 \geq \alpha_2, \beta_1 \geq \beta_2, \alpha_1 \geq \beta_1, \\ \alpha_1 + \alpha_2 = \beta_1 + \beta_2 = 1.$$

当  $x_2 > x_1$  时,由  $\alpha_1 \geq \beta_1$  得

$$(\alpha_1 x_2 + \alpha_2 x_1) - (\beta_1 x_2 + \beta_2 x_1) \\ = (\alpha_1 - \beta_1)x_2 + (\alpha_2 - \beta_2)x_1 \\ = (\alpha_1 - \beta_1)x_2 + [1 - \alpha_1 - (1 - \beta_1)]x_1 \\ = (\alpha_1 - \beta_1)(x_2 - x_1) \geq 0,$$

即有  $\alpha_1 x_2 + \alpha_2 x_1 \geq \beta_1 x_2 + \beta_2 x_1$ 。同理,由  $\alpha_1 \geq \alpha_2, \beta_1 \geq \beta_2$  得

$$\alpha_1 x_2 + \alpha_2 x_1 \geq \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, \beta_1 x_2 + \beta_2 x_1 \geq \beta_2 x_2 + \beta_1 x_1.$$

又由

$$x_1 + x_2 = (\alpha_2 x_2 + \alpha_1 x_1) + (\alpha_1 x_2 + \alpha_2 x_1) = (\beta_1 x_2 + \beta_2 x_1) + (\beta_2 x_2 + \beta_1 x_1),$$

可以推知

$$\alpha_1 x_2 + \alpha_2 x_1 \geq \beta_1 x_2 + \beta_2 x_1 \geq \beta_2 x_2 + \beta_1 x_1.$$

因此对任意的函数  $U(x) \in U_2$ ,

$$U(\beta_1 x_2 + \beta_2 x_1) - U(\alpha_1 x_2 + \alpha_2 x_1) \leq 0 \\ U(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) + U(\alpha_1 x_2 + \alpha_2 x_1) \\ \leq U(\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2) + U(\beta_1 x_2 + \beta_2 x_1).$$

进一步可得

$$E[U(\beta_1 X_1 + \beta_2 X_2)] - E[U(\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2)] \\ = \iint [U(\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2) - U(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)] f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \\ = \iint_{x_2 > x_1} [U(\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2) - U(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)] f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 + \\ \iint_{x_1 \geq x_2} [U(\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2) - U(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)] f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \\ + \iint_{x_2 > x_1} [U(\beta_1 x_2 + \beta_2 x_1) - U(\alpha_1 x_2 + \alpha_2 x_1)] f(x_2, x_1) dx_1 dx_2$$

$$\geq \iint_{x_2 > x_1} [U(\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2) - U(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)] f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 + \\ \iint_{x_2 > x_1} [U(\beta_1 x_2 + \beta_2 x_1) - U(\alpha_1 x_2 + \alpha_2 x_1)] f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \\ = \iint_{x_2 > x_1} [U(\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2) + U(\beta_2 x_1 + \beta_1 x_2) - U(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) - \\ U(\alpha_2 x_1 + \alpha_1 x_2)] f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \geq 0,$$

上述推导过程中第 3 个等号成立的原因有二:一是因为将第 2 个积分中交换了变量的命名方式,积分值不变;二是因为  $x_2 = x_1$  时,第 2 个积分的被积函数等于 0。第 1 个不等号是因为  $U(\beta_1 x_2 + \beta_2 x_1) - U(\alpha_1 x_2 + \alpha_2 x_1) \leq 0$ , 且  $f(x_1, x_2)$  为排列增函数,故当  $x_2 > x_1$  时,成立  $f(x_1, x_2) > f(x_2, x_1)$ 。因此由引理 1.1 可得  $\beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 \geq_{SSD} \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2$ 。

再考虑  $n \geq 3$  情形,由于  $\alpha_n \geq_m \beta_n$ , 因此  $\beta_n$  可由  $\alpha_n$  经过有限次  $T$  变换得到,即  $\beta_n = T_k T_{k-1} \cdots T_1 \alpha_n, k \leq n - 1$ 。不失一般性,假定

$$T_1 = \lambda I + (1 - \lambda) Q_1 = \begin{pmatrix} \lambda & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda \end{pmatrix} + (1 - \lambda) \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ 1 & 0 & & \\ & & 1 & \\ & & & \ddots \\ & & & & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 - \lambda & & \\ 1 - \lambda & \lambda & & \\ & & 1 & \\ & & & \ddots \\ & & & & 1 \end{pmatrix},$$

其中  $1/2 \leq \lambda \leq 1$ 。令  $\gamma_n = (\gamma_1, \cdots, \gamma_n)^T = T_1 \alpha_n$ , 则

$$\sum_{i=1}^n \gamma_i X_i = (\lambda \alpha_1 + (1 - \lambda) \alpha_2) X_1 + (\lambda \alpha_2 + (1 - \lambda) \alpha_1) X_2 + \sum_{i=3}^n \alpha_i X_i.$$

若  $\sum_{i=3}^n \alpha_i = 0$ , 则  $\alpha_n = (\alpha_1, \alpha_2, 0, \cdots, 0)^T$ , 于是有

$$\gamma_n = (\lambda \alpha_1 + (1 - \lambda) \alpha_2, \lambda \alpha_2 + (1 - \lambda) \alpha_1, 0, \cdots, 0)^T.$$

由于  $1/2 \leq \lambda \leq 1, \alpha_1 \geq \alpha_2$  且满足

$$\alpha_1 + \alpha_2 = \lambda \alpha_1 + (1 - \lambda) \alpha_2 + \lambda \alpha_2 + (1 - \lambda) \alpha_1,$$

$$(\alpha_1, \alpha_2)^T \geq_m (\lambda \alpha_1 + (1 - \lambda) \alpha_2, \lambda \alpha_2 + (1 - \lambda) \alpha_1)^T.$$

由  $n = 2$  时的结论可得

$$(\lambda\alpha_1 + (1 - \lambda)\alpha_2)X_1 + (\lambda\alpha_2 + (1 - \lambda)\alpha_1)X_2 \geq_{\text{SSD}} \alpha_1X_1 + \alpha_2X_2.$$

若  $\sum_{i=3}^n \alpha_i \neq 0$ , 因

$$\begin{aligned} (\alpha_1, \alpha_2)^T / (1 - \sum_{i=3}^n \alpha_i) &\geq_M (\lambda\alpha_1 + (1 - \lambda)\alpha_2, \lambda\alpha_2 + (1 - \lambda)\alpha_1)^T / (1 - \sum_{i=3}^n \alpha_i). \end{aligned}$$

再由  $n = 2$  时的结论得

$$\begin{aligned} &[(\lambda\alpha_1 + (1 - \lambda)\alpha_2)X_1 + (\lambda\alpha_2 + (1 - \lambda)\alpha_1)X_2] / (1 - \sum_{i=3}^n \alpha_i) \\ &\geq_{\text{SSD}} (\alpha_1X_1 + \alpha_2X_2) / (1 - \sum_{i=3}^n \alpha_i). \end{aligned}$$

由于具有占优关系关于正的伸缩变换封闭, 因此有

$$(\lambda\alpha_1 + (1 - \lambda)\alpha_2)X_1 + (\lambda\alpha_2 + (1 - \lambda)\alpha_1)X_2 \geq_{\text{SSD}} \alpha_1X_1 + \alpha_2X_2.$$

另一方面, 占优关系关于平移变换也封闭, 即

$$\begin{aligned} &(\lambda\alpha_1 + (1 - \lambda)\alpha_2)X_1 + (\lambda\alpha_2 + (1 - \lambda)\alpha_1)X_2 + \sum_{i=3}^n \alpha_i x_i \geq_{\text{SSD}} \alpha_1X_1 + \alpha_2X_2 + \sum_{i=3}^n \alpha_i x_i. \end{aligned}$$

因此, 对任意的  $U \in \mathcal{U}_2$ ,

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}[U(\sum_{i=1}^n \gamma_i X_i)] \\ &= \mathbb{E}\{\mathbb{E}[U((\lambda\alpha_1 + (1 - \lambda)\alpha_2)X_1 + (\lambda\alpha_2 + (1 - \lambda)\alpha_1)X_2 + \sum_{i=3}^n \alpha_i X_i) \mid X_3, \dots, X_n]\} \\ &\geq \mathbb{E}\{\mathbb{E}[U(\alpha_1X_1 + \alpha_2X_2 + \sum_{i=3}^n \alpha_i X_i) \mid X_3, \dots, X_n]\} \\ &= \mathbb{E}[U(\sum_{i=1}^n \alpha_i X_i)] \end{aligned}$$

令  $\mathbf{K}_n = (k_1, \dots, k_n)^T = \mathbf{T}_2 \boldsymbol{\gamma}_n$ , 同理可得

$$\mathbb{E}[U(\sum_{i=1}^n k_i X_i)] \geq \mathbb{E}[U(\sum_{i=1}^n \gamma_i X_i)].$$

重复上面推导过程, 可得

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[U(\sum_{i=1}^n \beta_i X_i)] &\geq \dots \geq \mathbb{E}[U(\sum_{i=1}^n k_i X_i)] \geq \\ &\mathbb{E}[U(\sum_{i=1}^n \alpha_i X_i)]. \end{aligned}$$

再次利用引理 1.1, 有  $\sum_{i=1}^n \beta_i X_i \geq_{\text{SSD}} \sum_{i=1}^n \alpha_i X_i$ .  $\square$

利用引理 3.4, 可以得到如下定理 3.3。

**定理 3.3**  $(X_1, \dots, X_n)$  和  $(T_1, \dots, T_n)$  是 2 列随机变量, 令  $Z_i = X_i e^{-\delta T_i}$ , 其中  $i = 1, \dots, n$ 。设  $(Z_1, \dots, Z_n)$  的联合概率密度函数为排列增的, 若  $\boldsymbol{\alpha}_n \geq_M \boldsymbol{\beta}_n$ , 且满足  $\boldsymbol{\alpha}_n, \boldsymbol{\beta}_n \in \mathcal{S}_n$ , 则

$$\sum_{i=1}^n \beta_i X_i e^{-\delta T_i} \geq_{\text{SSD}} \sum_{i=1}^n \alpha_i X_i e^{-\delta T_i}.$$

定理 3.3 要求联合密度函数是排列增的。下面的定理 3.4 表明, 在可交换条件下, 定理 3.3 的结论仍然成立。

**定理 3.4** 设  $(X_1, T_1), \dots, (X_n, T_n)$  为 1 列可交换随机向量, 向量  $\boldsymbol{\alpha}_n = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)^T$  和  $\boldsymbol{\beta}_n = (\beta_1, \dots, \beta_n)^T$  满足  $\boldsymbol{\alpha}_n \geq_M \boldsymbol{\beta}_n$ , 则对任意的  $\delta > 0$ , 成立

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \beta_i X_i e^{-\delta T_i} &\geq_{\text{SSD}} \sum_{i=1}^n \alpha_i X_i e^{-\delta T_i}, \\ \sum_{i=1}^n \alpha_i X_i e^{-\delta T_i} &\geq_{\text{RSSD}} \sum_{i=1}^n \beta_i X_i e^{-\delta T_i}. \end{aligned}$$

**证明** 因  $\boldsymbol{\alpha}_n \geq_M \boldsymbol{\beta}_n$ , 由引理 1.2 得  $\boldsymbol{\beta}_n = \mathbf{T}_k \mathbf{T}_{k-1} \dots \mathbf{T}_1 \boldsymbol{\alpha}_n$ , 其中  $\mathbf{T}_1, \dots, \mathbf{T}_k$  为一系列  $\mathbf{T}$  矩阵,  $k \leq n - 1$ 。不失一般性, 假定

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_1 &= \lambda \mathbf{I} + (1 - \lambda) \mathbf{Q}_1 = \begin{pmatrix} \lambda & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda \end{pmatrix} + \\ &(1 - \lambda) \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ 1 & 0 & & \\ & & 1 & \\ & & & \ddots \\ & & & & 1 \end{pmatrix} = \\ &\begin{pmatrix} \lambda & 1 - \lambda & & \\ 1 - \lambda & \lambda & & \\ & & 1 & \\ & & & \ddots \\ & & & & 1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

其中  $1/2 \leq \lambda \leq 1$ 。令  $\boldsymbol{\gamma}_n = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)^T = \mathbf{T}_1 \boldsymbol{\alpha}_n$ , 则对任意  $U \in \mathcal{U}_2$ , 可以得到

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}[U(\sum_{i=1}^n \gamma_i X_i e^{-\delta T_i})] \\ &= \mathbb{E}\{U[(\lambda\alpha_1 + (1 - \lambda)\alpha_2)X_1 e^{-\delta T_1} + (\lambda\alpha_2 + (1 - \lambda)\alpha_1)X_2 e^{-\delta T_2} + \alpha_3 X_3 e^{-\delta T_3} + \dots + \alpha_n X_n e^{-\delta T_n}]\} \\ &= \mathbb{E}\{U[\lambda(\alpha_1 X_1 e^{-\delta T_1} + \alpha_2 X_2 e^{-\delta T_2} + \dots + \alpha_n X_n e^{-\delta T_n})] + (1 - \lambda)(\alpha_2 X_1 e^{-\delta T_1} + \alpha_1 X_2 e^{-\delta T_2} + \dots + \alpha_n X_n e^{-\delta T_n})]\} \\ &\geq \lambda \mathbb{E}[U(\alpha_1 X_1 e^{-\delta T_1} + \alpha_2 X_2 e^{-\delta T_2} + \dots + \alpha_n X_n e^{-\delta T_n})] + (1 - \lambda) \mathbb{E}[U(\alpha_2 X_1 e^{-\delta T_1} + \alpha_1 X_2 e^{-\delta T_2} + \dots + \alpha_n X_n e^{-\delta T_n})] \end{aligned}$$



$$= \lambda E[U(\alpha_1 X_1 e^{-\delta T_1} + \alpha_2 X_2 e^{-\delta T_2} + \cdots + \alpha_n X_n e^{-\delta T_n})] +$$
$$(1 - \lambda) E[U(\alpha_1 X_1 e^{-\delta T_1} + \alpha_2 X_2 e^{-\delta T_2} + \cdots + \alpha_n X_n e^{-\delta T_n})]$$
$$= E[U(\sum_{i=1}^n \alpha_i X_i e^{-\delta T_i})].$$

其中:第 1 个不等号由 Jensen 不等式得到,第 3 个等号是由于  $(X_1, T_1)$  和  $(X_2, T_2)$  可交换。再令  $\mathbf{K}_n = (k_1, \cdots, k_n)^T = \mathbf{T}_2 \boldsymbol{\gamma}_n$ , 则对任意的  $U \in \mathcal{U}_2$ , 同理可得

$$E[U(\sum_{i=1}^n k_i X_i e^{-\delta T_i})] \geq E[U(\sum_{i=1}^n \gamma_i X_i e^{-\delta T_i})].$$
  
重复上面推导过程,可得

$$E[U(\sum_{i=1}^n \beta_i X_i e^{-\delta T_i})] \geq \cdots \geq E[U(\sum_{i=1}^n k_i X_i e^{-\delta T_i})]$$
$$\geq E[U(\sum_{i=1}^n \alpha_i X_i e^{-\delta T_i})].$$

因此成立  $\sum_{i=1}^n \beta_i X_i e^{-\delta T_i} \geq_{\text{SSD}} \sum_{i=1}^n \alpha_i X_i e^{-\delta T_i}$ 。同理可证  $\sum_{i=1}^n \alpha_i X_i e^{-\delta T_i} \geq_{\text{RSSD}} \sum_{i=1}^n \beta_i X_i e^{-\delta T_i}$ 。□

随机变量可交换条件下,定理 3.4 揭示,风险偏好型决策者更偏好以超优向量构成的投资组合,而风险厌恶型决策者更偏好以被超优向量构成的投资组合。

定理 3.4 要求  $(X_1, T_1), \cdots, (X_n, T_n)$  为 1 列可交换随机向量。若舍弃可交换的条件,定理结论是否仍然成立? 答案是未必的。考虑  $n = 2$  的情形,设向量  $(X_1, T_1)$  与向量  $(X_2, T_2)$  对应的分布为

$$X_1 = e^{0.5Z+0.3}, X_2 = e^{0.8Z+0.4}, Z \sim N(0,1),$$
$$T_i \sim U(1,3), i = 1, 2.$$

其中  $X_1, X_2, T_1, T_2$  相互独立。显然  $(X_1, T_1), (X_2, T_2)$  不满足可交换条件。对于随机变量  $X_1 e^{-\delta T_1}$  和  $X_2 e^{-\delta T_2}$ , 考虑其加权形式  $w_1 X_1 e^{-\delta T_1} + w_2 X_2 e^{-\delta T_2}$ , 其中  $(w_1, w_2)^T \in \mathbf{S}_2, \delta = 0.1$ 。若  $\mathbf{W}_1 = (0.9, 0.1)^T, \mathbf{W}_2 = (0.7, 0.3)^T$ , 图 1 给出了  $w_1 X_1 e^{-\delta T_1} + w_2 X_2 e^{-\delta T_2}$  取不同权重时的分布函数图像 ( $F_{\mathbf{W}_i}(x)$  表示权重取  $\mathbf{W}_i$  时  $w_1 X_1 e^{-\delta T_1} + w_2 X_2 e^{-\delta T_2}$  的分布函数,子图“cross area”是对分布函数局部区域进行的细致描绘,该子图表明两分布函数确实存在交叉的情况)。由图 1 可见,  $F_{\mathbf{W}_1}(x)$  先位于  $F_{\mathbf{W}_2}(x)$  之下,随后位于  $F_{\mathbf{W}_2}(x)$  之上。因此,  $F_{\mathbf{W}_1}(x)$  和  $F_{\mathbf{W}_2}(x)$  之间不满足 FSD 序。

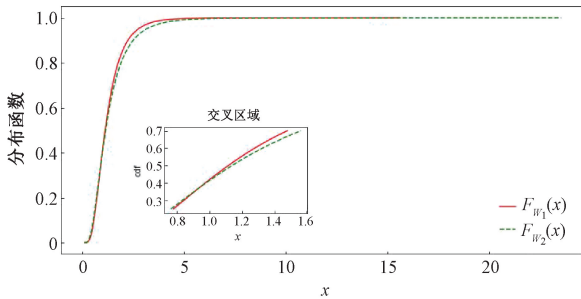


图 1  $F_{\mathbf{W}_1}(x)$  与  $F_{\mathbf{W}_2}(x)$  的图像

Fig. 1 Figure of  $F_{\mathbf{W}_1}(x)$  and  $F_{\mathbf{W}_2}(x)$

为验证  $F_{\mathbf{W}_1}(x)$  和  $F_{\mathbf{W}_2}(x)$  间 SSD 序是否成立,需对任意的  $x > 0$ , 判断  $H_1(x) = \int_{-\infty}^x (F_{\mathbf{W}_2}(u) - F_{\mathbf{W}_1}(u)) du \geq 0$  是否始终成立。图 2 给出了  $H_1(x)$  的图像。易见,  $H_1(x)$  并非始终是非负的, 因此  $F_{\mathbf{W}_1}(x)$  和  $F_{\mathbf{W}_2}(x)$  之间也不满足 SSD 序关系。即去掉可交换条件,定理 3.5 的第 1 个结论有可能不成立。

还可以考虑  $F_{\mathbf{W}_1}(x)$  和  $F_{\mathbf{W}_2}(x)$  之间是否存在 RSSD 序关系,即对任意  $x > 0$ , 判断不等式

$$H_2(x) = \int_x^{\infty} (F_{\mathbf{W}_1}(u) - F_{\mathbf{W}_2}(u)) du \geq 0$$

是否始终成立。图 3 给出  $H_2(x)$  的图像,显然可见  $H_2(x)$  始终非负,故  $F_{\mathbf{W}_1}(x)$  和  $F_{\mathbf{W}_2}(x)$  之间存在 RSSD 序关系。因此,去掉可交换的条件,定理 3.4 的第 2 个结论仍可能成立。

若考虑

$$X_1 = e^{0.6Z+0.6}, X_2 = e^{0.8Z+0.4}, Z \sim N(0,1),$$
$$T_i \sim U(1,3), i = 1, 2.$$

其中  $X_1, X_2, T_1, T_2$  相互独立。易知  $(X_1, T_1), (X_2, T_2)$  仍不满足可交换条件,权重仍然取为  $\mathbf{W}_1 = (0.9, 0.1)^T$  和  $\mathbf{W}_2 = (0.7, 0.3)^T$ 。图 4 给

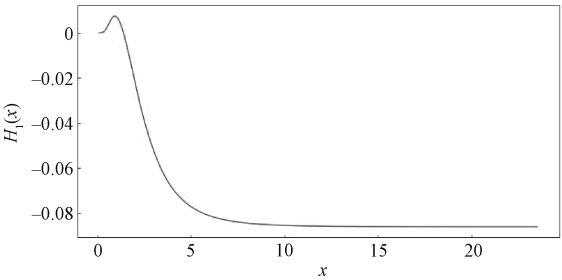


图 2  $H_1(x) = \int_{-\infty}^x (F_{\mathbf{W}_2}(u) - F_{\mathbf{W}_1}(u)) du$  的图像

Fig. 2 Figure of  $H_1(x) = \int_{-\infty}^x (F_{\mathbf{W}_2}(u) - F_{\mathbf{W}_1}(u)) du$

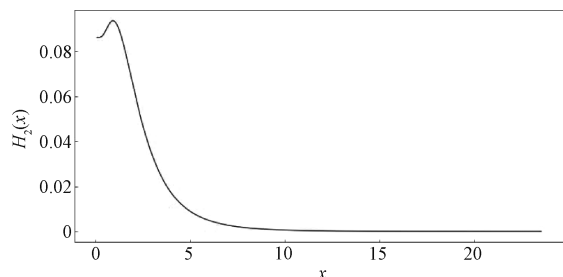


图 3  $H_2(x) = \int_x^\infty (F_{w_1}(u) - F_{w_2}(u)) du$  的图像

Fig. 3 Figure of  $H_2(x) = \int_x^\infty (F_{w_1}(u) - F_{w_2}(u)) du$

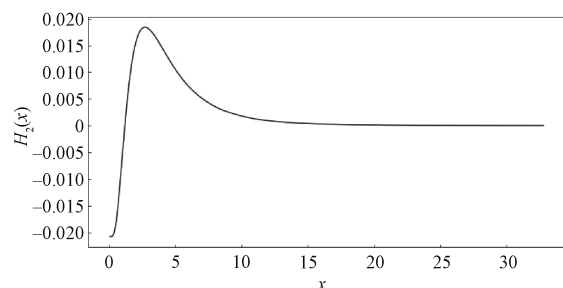


图 4  $H_2(x) = \int_x^\infty (F_{w_1}(u) - F_{w_2}(u)) du$  的图像

Fig. 4 Figure of  $H_2(x) = \int_x^\infty (F_{w_1}(u) - F_{w_2}(u)) du$

出此时  $H_2(x)$  的图像。易见  $H_2(x)$  并非始终是非负的,故  $F_{w_1}(x)$  和  $F_{w_2}(x)$  之间不满足 RSSD 序关系。因此,去掉可交换条件,定理 3.5 的第 2 个结论也有可能不成立。

由上述 2 个例子可以得出,若舍弃可交换的条件,定理 3.4 的 2 个结论都有可能不成立。因此,可交换的条件不能轻易舍去。

## 4 结论与展望

本文先在单笔投资的情形下,考虑利率贴现模型分别按一阶随机占优序、二阶随机占优序、风险偏好型随机占优序递减时,投资额  $X$ 、投资周期  $T$  和折扣率  $\delta$  间应满足的占优条件。随后,当组合系数按超优序递减时,分别在独立同分布、联合密度函数排列增、可交换 3 种情形下,讨论投资组合情况下的利率贴现模型按二阶随机占优序、风险偏好型随机占优序递减的充分条件。所得结果为不同类型风险偏好投资者的决策选择,具有一定的参考意义。

本文研究建立在随机变量均为非负的假设上,但是收益值为负也具有经济学意义。若是收益取值范围并不局限于正半区间,基于贴现意义

下随机占优关系是否依旧可以得到? 此问题可作进一步探究。另外,本文得到的结论是基于单阶随机占优序、二阶随机占优序以及风险偏好型随机占优序,但是随机占优的类型并不局限于此,还有三阶随机占优序、几乎随机占优序等等,对这些占优序,文中定理的条件和结论又如何变化? 也值得进一步思考。值得一提的是,本文第 3 节假设投资次数  $n$  是常数,若投资次数是随机的,则总投资贴现值是各次贴现的随机和,感兴趣的读者可参阅文献[22]予以考虑。

## 参考文献

- [1] Goovaerts M J, Dhaene J, de Schepper A. Stochastic upper bounds for present value functions[J]. The Journal of Risk and Insurance, 2000, 67(1): 1-14. DOI:10.2307/253674.
- [2] Hua L, Cheung K C. Stochastic orders of scalar products with applications[J]. Insurance: Mathematics and Economics, 2008, 42(3): 865-872. DOI: 10.1016/j.insmatheco.2007.10.004.
- [3] Zhuang W W, Chen Z J, Hu T Z. Optimal allocation of policy limits and deductibles under distortion risk measures[J]. Insurance: Mathematics and Economics, 2009, 44(3): 409-414. DOI: 10.1016/j.insmatheco.2008.11.012.
- [4] Asmussen S, Christensen B J, Taksar M. Portfolio size as function of the premium: modelling and optimization[J]. Stochastics, 2013, 85(4): 575-588. DOI: 10.1080/17442508.2013.797426.
- [5] Jeon J, Park K. Optimal retirement and portfolio selection with consumption ratcheting[J]. Mathematics and Financial Economics, 2020, 14(3): 353-397. DOI:10.1007/s11579-020-00259-w.
- [6] Agudelo G, Franco L, Saona P. Actuarial model for estimating the optimum rate of return of a joint-and-survivor annuity portfolio[J]. Journal of Intelligent & Fuzzy Systems, 2021, 40(2): 1751-1759. DOI:10.3233/jifs-189182.
- [7] Ranjbar M, Nasiri M M, Torabi S A. Multi-mode project portfolio selection and scheduling in a build-operate-transfer environment[J]. Expert Systems With Applications, 2022, 189: 116-134. DOI:10.1016/j.eswa.2021.116134.
- [8] 廖长高,李贤平,徐萍. 关于 CIR 模型中即期利率的条件密度及贴现债券定价[J]. 应用数学,2002, 15(S1): 81-84.
- [9] Hadar J, Russell W. Rules for ordering uncertain prospects[J]. The American Economic Review, 1969, 59(1): 25-34.
- [10] Hanoch G, Levy H. The efficiency analysis of choices involving risk[J]. The Review of Economic Studies, 1969, 36(3): 335-346. DOI: 10.2307/2296431.
- [11] Rothschild M, Stiglitz J E. Increasing risk: I. A definition[J]. Journal of Economic Theory, 1970, 2(3): 225-243.



DOI: 10.1016/0022-0531(70)90038-4.

[12] Hammond J S III. Simplifying the choice between uncertain prospects where preference is nonlinear [J]. Management Science, 1974, 20 ( 7 ): 1047-1072. DOI: 10.1287/mnsc.20.7.1047.

[13] Meyer J. Second degree stochastic dominance with respect to a function[J]. International Economic Review, 1977, 18(2): 477-487. DOI:10.2307/2525760.

[14] Hadar J, Russell W R. Stochastic dominance and diversification[J]. Journal of Economic Theory, 1971, 3 (3): 288-305. DOI:10.1016/0022-0531(71)90024-X.

[15] Tesfatsion L. Stochastic dominance and the maximization of expected utility[J]. The Review of Economic Studies, 1976, 43(2):301-315. DOI:10.2307/2297326.

[16] Li C K, Wong W K. Extension of stochastic dominance theory to random variables[J]. RAIRO-Operations Research, 1999, 33(4): 509-524. DOI:10.1051/ro: 1999100.

[17] Guo X, Wong W K. Multivariate stochastic dominance for risk averters and risk seekers[J]. RAIRO-Operations Research, 2016, 50(3):575-586. DOI:10.1051/ro/2016026.

[18] Levy H. Stochastic dominance: investment decision making under uncertainty [M]. 3rd ed. New York, NY: Springer New York, 2016. DOI:10.1007/978-3-319-21708-6.

[19] Ma C. On peakedness of distributions of convex combinations [J]. Journal of Statistical Planning and Inference, 1998, 70 (1):51-56. DOI:10.1016/S0378-3758 (97)00178-X.

[20] Shaked M, Shanthikumar J G. Stochastic orders [M]. New York, NY: Springer New York, 2007. DOI:10.1007/978-0-387-34675-5.

[21] Egozcue M, Wong W K. Gains from diversification on convex combinations: a majorization and stochastic dominance approach [J]. European Journal of Operational Research, 2010, 200 ( 3 ): 893-900. DOI: 10.1016/j. ejor. 2009. 01. 007.

[22] 高振龙,胡晓予. 二重随机序列随机和的重对数律[J]. 中国科学院研究生院学报, 2011, 28(4):424-430. DOI:10.7523/j. issn. 2095-6134. 2011. 4. 002.