文章编号:2095-6134(2025)02-0145-08

# Rep( $F[C_{2^\alpha}]$ )的 Krull 维数与准素分解 *

卢鑫,唐国平†

(中国科学院大学数学科学学院,北京 100049)

(2023 年 4 月 6 日收稿; 2023 年 5 月 16 日收修改稿)

**Lu X, Tang G P. Krull dimension and primary decomposition of Rep( $F[C_2{}^{\alpha}]$ )[J]. Journal of University of Chinese Academy of Sciences, 2025, 42(2): 145-152. DOI: 10.7523/j.ucas.2023.057.**

**摘 要** 令 $F$ 为特征为 2 的域, $C_{2^\alpha}$ 为 $2^\alpha$ 阶循环群。以群代数 $F[C_{2^\alpha}]$ 的所有有限维不可分解模的同构类为 $\mathbf{Z}$ -基,以 $F$ 模的张量积为乘法所构成的环称为 $F[C_{2^\alpha}]$ 的表示环,记为 Rep( $F[C_{2^\alpha}]$ ). 在 Higman 工作的基础上进一步研究证明表示环 Rep( $F[C_{2^\alpha}]$ ) 的 Krull 维数 1 并得到其所有素理想的具体形式。之后证明 Rep( $F[C_{2^\alpha}]$ ) 是 reduced 环,并给出零理想的极小准素分解。最后证明 Spec(Rep( $F[C_{2^\alpha}]$ )) 是连通的拓扑空间。

**关键词** 表示环;素理想;模表示

**中图分类号**:O153.3 **文献标志码**:A **DOI**:10.7523/j.ucas.2023.057

## Krull dimension and primary decomposition of Rep( $F[C_{2^\alpha}]$ )

LU Xin, TANG Guoping

(*School of Mathematical Sciences, University of Chinese Academy of Sciences, Beijing* 100049, *China*)

**Abstract** Let $F$ be a field with characteristic 2 and $C_{2^\alpha}$ be a cyclic group with order $2^\alpha$. The ring, which has a $\mathbf{Z}$ -basis by finite dimensional indecomposable $F[C_{2^\alpha}]$ modules and multiplications by tensor product of $F$ module, is called representation ring and denoted by Rep( $F[C_{2^\alpha}]$ ). Based on Higman's work, we further get the Krull dimension and the concrete forms of all prime ideals of Rep( $F[C_{2^\alpha}]$ ). And then, we prove that Rep( $F[C_{2^\alpha}]$ ) is a reduced ring and find the minimal primary decomposition of the zero ideal. At last, we prove that Spec(Rep( $F[C_{2^\alpha}]$ )) is a connected topological space.

**Keywords** representation ring; prime ideal; modular representation

本文中 $F$ 总是特征为 2 的域, $C_{2^\alpha}$ 为 $2^\alpha$ 阶循环群,其中 $1 \leqslant \alpha$。$F[C_{2^\alpha}]$ 是群 $C_{2^\alpha}$ 的群代数。除非特别指出,所有模均指左模。

文献[1]分类了 $F[C_{2^\alpha}]$ 的所有互不同构的不可分解模 $M_1, M_2, \cdots, M_{2^\alpha}$,其中 $\dim_F(M_i) = i$。文献[2]递推地给出表示环 Rep( $F[C_{2^\alpha}]$ ) 的乘法结构。文献[3]则证明了表示环 Rep( $F[C_{2^\alpha}]$ ) $\otimes_{\mathbf{Z}} \mathbb{C}$ 是半单环。

* 国家自然科学基金(12271500)资助

† 通信作者,E-mail: tanggp@ucas.ac.cn

本文对 $\mathrm{Rep}(F[C_{2^\alpha}])$ 进行进一步研究,首先证明 $\mathrm{Rep}(F[C_{2^\alpha}])$ 的 Krull 维数为 1;然后给出 $\mathrm{Rep}(F[C_{2^\alpha}])$ 的所有素理想,找到零理想 0 的极小准素分解,最后证明谱空间 $\mathrm{Spec}(\mathrm{Rep}(F[C_{2^\alpha}]))$ 是连通的。

## 1　表示环的 Krull 维数

**定义 1.1**　令 $S$ 是所有有限生成的 $F[C_{2^\alpha}]$ 模 $M$ 的同构类 $[M]$ 的集合。对以 $S$ 为基的自由交换群,由其子群 $<[M]+[N]-[M\oplus N]\mid M, N\in S>$ 确定的商群在乘法 $[M][N]=[M\otimes_F N]$ 下成为一个交换环,称为 $F[C_{2^\alpha}]$ 的表示环,记作 $\mathrm{Rep}(F[C_{2^\alpha}])$。

**命题 1.1**　$\mathrm{Rep}(F[C_{2^\alpha}])\cong\mathbf{Z}[x_2,\cdots,x_{2^\alpha}]/I_{2^\alpha}$ 是环同构,其中 $I_{2^\alpha}$ 是由表示环中 $\mathbf{Z}$-基的乘法关系

$$[M_i\otimes_F M_j]=[M_{\beta_1}]+\cdots+[M_{\beta_n}]$$

(其中 $1\leqslant i,j\leqslant 2^\alpha$)决定的形如 $x_ix_j-(x_{\beta_1}+\cdots+x_{\beta_n})$(其中 $x_1=1$)的元素生成的理想。

**证明**　有限生成 $F[C_{2^\alpha}]$ 模 $M$ 有长度有限的合成列,故可写成不可分解模的直和。由 Grothendick 群的泛性性质,$\mathrm{Rep}(F[C_{2^\alpha}])$ 是以 $[M_1],[M_2],\cdots,[M_{2^\alpha}]$ 为基的自由 $\mathbf{Z}$ 模,其中 $\dim_F(M_i)=i$。于是在 $\mathrm{Rep}(F[C_{2^\alpha}])$ 中有

$$[M_i][M_j]=[M_i\otimes_F M_j]=[M_{\beta_1}]+\cdots+[M_{\beta_n}],$$

并且 $[M_1]$ 是乘法单位元。因此有加群同态

$$\varphi:\begin{cases}\mathrm{Rep}(F[C_{2^\alpha}]) & \rightarrow & \mathbf{Z}[x_2,\cdots,x_{2^\alpha}]/I_{2^\alpha},\\ [M_i] & \mapsto & \bar{x}_i.\end{cases}$$

令 $\psi:\begin{cases}\mathbf{Z}[x_2,\cdots,x_{2^\alpha}] & \rightarrow & \mathrm{Rep}(F[C_{2^\alpha}]),\\ x_i & \mapsto & [M_i],\end{cases}$ 则 $\psi$ 是环的满同态并且 $I_{2^\alpha}\subseteq\ker(\psi)$,于是诱导出 $\mathbf{Z}[x_2,\cdots,x_{2^\alpha}]/I_{2^\alpha}$ 到 $\mathrm{Rep}(F[C_{2^\alpha}])$ 的环同态 $\bar{\psi}$。$\bar{\psi}$ 与 $\varphi$ 互逆表明 $\bar{\psi}$ 是环同构。

由命题 1.1 可知 $\mathrm{Rep}(F[C_{2^\alpha}])$ 是诺特环。

**定理 1.1**　对 $1\leqslant i,j\leqslant 2^\alpha$,假设在 $\mathrm{Rep}(F[C_{2^\alpha}])$ 中有 $[M_i][M_j]=[M_{\beta_1}]+\cdots+[M_{\beta_n}]$,则有如下公式

$$[M_{2^\alpha-i}][M_j]=[M_{2^\alpha-\beta_1}]+\cdots+[M_{2^\alpha-\beta_n}]+(j-n)[M_{2^\alpha}],\quad(1)$$

$$[M_i][M_{2^\alpha-j}]=[M_{2^\alpha-i}][M_j]+(i-j)[M_{2^\alpha}],\quad(2)$$

$$[M_{2^\alpha-i}][M_{2^\alpha-j}]=[M_i][M_j]+(2^\alpha-i-j)[M_{2^\alpha}].\quad(3)$$

**证明**　设 $g$ 是 $C_{2^\alpha}$ 的生成元。于是有环的满同态 $\varphi:\begin{cases}F[x] & \rightarrow & F[C_{2^\alpha}],\\ x & \mapsto & g.\end{cases}$ 由于 $F[x]$ 是主理想整环,于是对任意 $M_k$,作为不可分解的 $F[x]$ 模,存在 $m_k\in M_k$ 使 $M_k=F[x]m_k$。此时有模同构 $F[x]/\mathrm{Ann}_{F[x]}(m_k)\cong M_k$。因为 $\mathrm{Ann}_{F[x]}(m_k)=(f(x))\supseteq((x-1)^{2^\alpha})$(注意 $F$ 的特征为 2),对比 $F[x]/\mathrm{Ann}_{F[x]}(m_k)\cong M_k$ 两边的 $F$ 模的维数可知 $\mathrm{Ann}_{F[x]}(m_k)=((x-1)^k)$。因此有 $F[x]/((x-1)^k)\cong M_k$ 是模同构。特别地 $F[C_{2^\alpha}]\cong M_{2^\alpha}$。

设 $F[C_{2^\alpha}]$ 模 $M$ 有直和分解

$$M=M_{\gamma_1}\oplus\cdots\oplus M_{\gamma_m},$$

其中 $1\leqslant\gamma_1\leqslant\cdots\leqslant\gamma_m\leqslant 2^\alpha$。由于 $M_k\cong F[x]/((x-1)^k)$ 是 $F[x]$ 模同构,所以有 $m=\dim_F(M/(x-1)M)$。由于 $M_k$ 作为群 $C_{2^\alpha}$ 的表示可以写成 Jordan 型矩阵

$$g\mapsto\begin{pmatrix}1 & 1 & & \\ & 1 & \ddots & \\ & & \ddots & 1\\ & & & 1\end{pmatrix}_{k\times k},$$

再根据 $M_k\cong F^{\oplus k}$,所以有 $F[C_{2^\alpha}]$ 模的短正合序列

$$0\rightarrow M_{2^\alpha-i}\rightarrow M_{2^\alpha}\rightarrow M_i\rightarrow 0,$$

其中 $1\leqslant i\leqslant 2^\alpha$。从而有 $F[C_{2^\alpha}]$ 模的短正合序列

$$0\rightarrow M_{2^\alpha-i}\otimes_F M_j\rightarrow M_{2^\alpha}\otimes_F M_j\rightarrow M_i\otimes_F M_j\rightarrow 0。$$

由推论 4.3.8[4] 有 $F[C_{2^\alpha}]$ 模同构 $M_{2^\alpha}\otimes_F M_j\cong jM_{2^\alpha}$,于是由定理中的记号 $j=\dim_F(M_{2^\alpha}\otimes_F M_j/(g-1)(M_{2^\alpha}\otimes_F M_j))\geqslant n=\dim_F(M_i\otimes_F M_j/(g-1)(M_i\otimes_F M_j))$。又因为 $0\rightarrow\bigoplus_{i=1}^{n}M_{2^\alpha-\beta_i}\rightarrow nM_{2^\alpha}\rightarrow\bigoplus_{i=1}^{n}M_{\beta_i}\rightarrow 0$ 是 $F[C_{2^\alpha}]$ 模的短正合序列,于是由 Schanul 定理可得

$$(M_{2^\alpha-i}\otimes_F M_j)\oplus nM_{2^\alpha}\cong(\bigoplus_{i=1}^{n}M_{2^\alpha-\beta_i})\oplus jM_{2^\alpha}。$$

从而在 $\mathrm{Rep}(F[C_{2^\alpha}])$ 中有 $[M_{2^\alpha-i}][M_j]=[M_{2^\alpha-\beta_1}]+\cdots+[M_{2^\alpha-\beta_n}]+(j-n)[M_{2^\alpha}]$。

由于 $\mathrm{Rep}(F[C_{2^\alpha}])$ 是交换环,所以式(2)可直接从式(1)得到。对于式(3),可以直接由前 2 个公式得到。

从定理 1.1 的证明中可以得到下面 2 个

推论。

**推论 1.1**　在 Rep($F[C_{2^\alpha}]$),对 $1 \leqslant i \leqslant 2^\alpha$,有

$$[M_{2^\alpha}][M_i] = i[M_{2^\alpha}].$$

**推论 1.2**　Rep($F[C_{2^\alpha}]$) 是 Rep($F[C_{2^{\alpha+1}}]$) 的子环。

**定理 1.2**　Rep($F[C_{2^\alpha}]$) 的 Krull 维数是 1。

**证明**　记 Rep($F[C_{2^\alpha}]$) 为 $R_\alpha$。由于在 $R_{\alpha+1}$ 中有 $[M_{2^{\alpha+1}}][M_{2^{\alpha+1}}] = 2^{\alpha+1}[M_{2^{\alpha+1}}]$,可知 $[M_{2^{\alpha+1}}]$ 满足 $x^2 - 2^{\alpha+1}x$,于是 $R_\alpha[M_{2^{\alpha+1}}]$ 是 $R_\alpha$ 的整扩张。

对 $1 \leqslant i < 2^\alpha$,设 $[M_{2^\alpha-i}][M_{2^\alpha-i}] = [M_{\beta_1}] + \cdots + [M_{\beta_n}]$。由定理 1.1,存在整数 $k$ 使得 $[M_{2^\alpha+i}][M_{2^\alpha+i}] = [M_{\beta_1}] + \cdots + [M_{\beta_n}] + k[M_{2^{\alpha+1}}]$。于是 $[M_{2^\alpha+i}]$ 满足 $x^2 - a$,其中 $a$ 属于 $R_\alpha[M_{2^{\alpha+1}}]$。从而 $R_{\alpha+1}$ 是 $R_\alpha[M_{2^{\alpha+1}}]$ 的整扩张,故 $R_{\alpha+1}$ 的 Krull 维数等于 $R_\alpha$ 的维数。

下面求 $R_1$ 的 Krull 维数。显然 $\mathbf{Z}[x]$ 的 Krull 维数 $\mathrm{Kr}(\mathbf{Z}[x]) = 2$。由命题 1.1 有 $R_1 \cong \mathbf{Z}[x]/(x(2-x))$,因此 $\mathrm{Kr}(R_1) = \sup\limits_m\{\mathrm{Kr}((R_1)_m)\}$,其中 $m$ 是 $\mathbf{Z}[x]$ 的任意极大理想,$(R_1)_m$ 是 $m$ 对 $R_1$ 的局部化。当 $x^2 - 2x \notin m$ 时,有 $(R_1)_m = 0$。当 $x^2 - 2x \in m$ 时,有环同构 $(R_1)_m \cong \mathbf{Z}[x]_m/(\frac{x(2-x)}{1})$。由于 $\frac{x(2-x)}{1}$ 不是 $\mathbf{Z}[x]_m$ 中的零因子,于是根据文献[5]中的推论 11.18 可得 $\mathrm{Kr}((R_1)_m) = \mathrm{Kr}(\mathbf{Z}[x]_m) - 1$。因此

$$\mathrm{Kr}(R_1) = \sup_m\{\mathrm{Kr}((\mathbf{Z}[x])_m)\} - 1 = 1.$$

## 2　零理想的极小准素分解

**引理 2.1**　在 Rep($F[C_{2^\alpha}]$) 中,设 $1 \leqslant k < \alpha, 0 \leqslant t \leqslant 2^{\alpha-k} - 1, 0 \leqslant i \leqslant 2^k$,则有

$$[M_{t2^k+i}][M_{2^k}] = i[M_{(t+1)2^k}] + (2^k - i)[M_{t2^k}]. \tag{4}$$

**证明**　首先 $M_{2^k-i}$ 与 $M_{2^k}$ 是不可分解的 $F[C_{2^\alpha}]$ 模,也是不可分解的 $F[C_{2^k}]$ 模。由推论 1.1,在 Rep($F[C_{2^k}]$) 中有 $[M_{2^k-i}][M_{2^k}] = (2^k - i)[M_{2^k}]$。由推论 1.2 这一公式在 Rep($F[C_{2^{k+1}}]$) 中也成立。由式(1),在 Rep($F[C_{2^{k+1}}]$) 中有

$$[M_{2^k+i}][M_{2^k}] = i[M_{2\cdot 2^k}] + (2^k - i)[M_{2^k}],$$

在上式中用 $2^k - i$ 代替 $i$ 可得在 Rep($F[C_{2^{k+1}}]$) 中有

$$[M_{2\cdot 2^k-i}][M_{2^k}] = (2^k - i)[M_{2\cdot 2^k}] + i[M_{2^k}],$$

再由式(1),在 Rep($F[C_{2^{k+2}}]$) 中有

$$[M_{2\cdot 2^k+i}][M_{2^k}] = (2^k - i)[M_{2\cdot 2^k}] + i[M_{3\cdot 2^k}].$$

重复上述过程即得所证。

**引理 2.2**　在 Rep($F[C_{2^\alpha}]$) 中设 $1 \leqslant k < \alpha$, $0 \leqslant i \leqslant 2^k$。

1) 当 $\begin{cases}1 \leqslant l \leqslant 2^{\alpha-k-1} \\ 2 \leqslant m \leqslant 2^{\alpha-k-1}\end{cases}$ 时,$[M_{(2l-1)\cdot 2^k+i}][M_{2l\cdot 2^k}]$ 和 $[M_{2(m-1)\cdot 2^k+i}][M_{2(m-1)\cdot 2^k}]$ 是 $[M_{2^{k+1}}], \cdots, [M_{2^\alpha}]$ 的非负整数为系数的线性组合。

2) 当 $1 \leqslant l \leqslant 2^{\alpha-k-1} - 1$ 时,

$$[M_{(2l+1)2^k+i}][M_{(2l+1)2^k}] = (2^k - i)[M_{2^k}] + \sum_{t=k+1}^{\alpha} k_t[M_{2^t}], \tag{5}$$

$$[M_{2l2^k+i}][M_{(2l+1)2^k}] = i[M_{2^k}] + \sum_{t=k+1}^{\alpha} k_t[M_{2^t}], \tag{6}$$

其中 $k_t$ 是非负整数。

**证明**　由引理 2.1 可得

$$[M_{2^k+i}][M_{2^k}] = i[M_{2\cdot 2^k}] + (2^k - i)[M_{2^k}],$$
$$[M_{2\cdot 2^k+i}][M_{2^k}] = i[M_{3\cdot 2^k}] + (2^k - i)[M_{2\cdot 2^k}],$$

由式(2)和上面第 2 个公式可得

$$[M_{2\cdot 2^k+i}][M_{3\cdot 2^k}] = i[M_{2^k}] + (2^k - i)[M_{2\cdot 2^k}] + (2^k + i)[M_{2^2\cdot 2^k}],$$

类似的,重复使用引理 2.1 和定理 1.1,可以得到如下公式

$$[M_{3\cdot 2^k+i}][M_{3\cdot 2^k}] = (2^k - i)[M_{2^k}] + (2^{k+1} + i)[M_{2^2\cdot 2^k}],$$
$$[M_{2^k+i}][M_{2\cdot 2^k}] = (2^k + i)[M_{2\cdot 2^k}],$$
$$[M_{2\cdot 2^k+i}][M_{2\cdot 2^k}] = (2\cdot 2^k - i)[M_{2\cdot 2^k}] + i[M_{4\cdot 2^k}],$$
$$[M_{3\cdot 2^k+i}][M_{4\cdot 2^k}] = (3\cdot 2^k + i)[M_{4\cdot 2^k}],$$
$$[M_{4\cdot 2^k+i}][M_{4\cdot 2^k}] = (4\cdot 2^k - i)[M_{4\cdot 2^k}] + i\cdot[M_{8\cdot 2^k}].$$

1) 由上面讨论,易知 $l = 1, 2$ 且 $m = 2$ 时所证结论成立。设 $l, m \leqslant 2^t$ 时,所证结论成立。对 $t$ 作归纳法。

当 $2^t + 1 \leqslant l \leqslant 2^{t+1} - 1$,取 $w$ 是正整数,使 $2l + 1 < 2^{w+1-k} < 2^{t+1} + 2l$。由归纳假设,可得

$$[M_{(2^{w+1-k}-2l-1)2^k+(2^k-i)}][M_{(2^{w+1-k}-2l)2^k}] = \sum_{t=k+1}^{\alpha} k_t[M_{2^t}],$$

于是由式(3),有 $[M_{2l2^k+i}][M_{2l2^k}] = \sum\limits_{t=k+1}^{\alpha} k'_t[M_{2^t}]$,其中 $k'_t$ 是非负整数(后面同理)。

当 $l = 2^t$ 时,由 $[M_{2^{k+t+1}-i}][M_{2^{k+t+1}}] = (2^{k+t+1} -$

$i)[M_{2^{k+t+1}}]$ 和式(1),可知也有 $[M_{2l2^k+i}][M_{2l2^k}]=\sum_{t=k+1}^{\alpha}k'_t[M_{2^t}]$ 成立。因此对任意 $2^t+1\leqslant m\leqslant 2^{t+1}$,有

$$[M_{2(m-1)2^k+i}][M_{2(m-1)2^k}]=\sum_{t=k+1}^{\alpha}k'_t[M_{2^t}]$$

成立。

再设 $2^t+1\leqslant m\leqslant 2^{t+1}$,取 $w$ 是正整数,使 $2(m-1)+1<2^{w+1-k}\leqslant 2^{t+1}+2(m-1)$。由归纳假设可得

$$[M_{(2^{w+1-k}-2(m-1))2^k+i}][M_{(2^{w+1-k}-2(m-1))2^k}]=\sum_{t=k+1}^{\alpha}k_t[M_{2^t}],$$

从而由式(3)有

$$[M_{(2(m-1)-1)2^k+(2^k-i)}][M_{2(m-1)2^k}]=\sum_{t=k+1}^{\alpha}k'_t[M_{2^t}],$$

$m=2^{t+1}+1$ 可直接代入上式验证。因此,对任意 $2^t\leqslant l\leqslant 2^{t+1}$,有

$$[M_{(2l-1)2^k+i}][M_{2l2^k}]=\sum_{t=k+1}^{\alpha}k'_t[M_{2^t}].$$

综上,证明了 $l,m\leqslant 2^{t+1}$ 时有结论成立。

2)易知当 $l=1$ 时,所证结论成立。设对 $l\leqslant 2^t$,有所证结论成立。

当 $2^t+1\leqslant l\leqslant 2^{t+1}-1$,取 $w$ 是正整数,使 $2(l+1)\leqslant 2^{w+1-k}<2^{t+1}+2(l+1)$。由归纳假设,有 $[M_{(2^{w+1-k}-2(l+1)+1)2^k}][M_{(2^{w+1-k}-2(l+1)+1)2^k+(2^k-i)}]=i[M_{2^k}]+\sum_{t=k+1}^{\alpha}k_t[M_{2^t}]$。于是根据式(3)可得

$$[M_{2l2^k+i}][M_{(2l+1)2^k}]=i[M_{2^k}]+\sum_{t=k+1}^{\alpha}k'_t[M_{2^t}],$$

其中 $k'_t$ 是非负整数(后面同理)。

当 $2^t+1\leqslant l\leqslant 2^{t+1}-2$ 时,取 $w$ 是正整数,使 $2(l+1)+2\leqslant 2^{w+1-k}<2^{t+1}+2(l+1)$,考虑 $[M_{(2^{w+1-k}-2(l+1))2^k+(2^k-i)}][M_{(2^{w+1-k}-2(l+1)+1)2^k}]=(2^k-i)[M_{2^k}]+\sum_{t=k+1}^{\alpha}k_t[M_{2^t}]$,于是有

$$[M_{(2l+1)2^k+i}][M_{(2l+1)2^k}]=(2^k-i)[M_{2^k}]+\sum_{t=k+1}^{\alpha}k'_t[M_{2^t}].$$

当 $l=2^{t+1}-1$ 时,由于 $[M_{2^k-i}][M_{2^k}]=(2^k-i)[M_{2^k}]$,所以由式(3)可得

$$[M_{(2l+1)2^k+i}][M_{(2l+1)2^k}]=[M_{(2^{t+2}-1)2^k+i}][M_{(2^{t+2}-1)2^k}]=(2^k-i)[M_{2^k}]+\sum_{t=k+1}^{\alpha}k'_t[M_{2^t}].$$

当 $t\leqslant\alpha-k-3,l=2^{t+1}$ 时,由于

$$[M_{2^{t+2}2^k-i}][M_{(2^{t+2}-1)2^k}]=[M_{(2(l-1)+1)2^k+2^k-i}][M_{(2(l-1)+1)2^k}]=i[M_{2^k}]+\sum_{t=k+1}^{\alpha}k_t[M_{2^t}],$$

所以由 $2^{t+k+3}\leqslant 2^\alpha$ 和式(3)可知

$$[M_{2l2^k+i}][M_{(2l+1)2^k}]=[M_{2^{t+2}2^k+i}][M_{(2^{t+2}+1)2^k}]=i[M_{2^k}]+\sum_{t=k+1}^{\alpha}k'_t[M_{2^t}].$$

最后,再令 $t\leqslant\alpha-k-3,l=2^{t+1}$,根据前面所证的结论有

$$[M_{2(l-1)2^k+(2^k-i)}][M_{(2(l-1)+1)2^k}]=(2^k-i)[M_{2^k}]+\sum_{t=k+1}^{\alpha}k_t[M_{2^t}],$$

所以应用式(3)可知

$$[M_{(2l+1)2^k+i}][M_{(2l+1)2^k}]=(2^k-i)[M_{2^k}]+\sum_{t=k+1}^{\alpha}k'_t[M_{2^t}].$$

综上,证明了 $l\leqslant 2^{t+1}$ 时式(5)和式(6)成立。

**引理 2.3** 在 $\mathrm{Rep}(F[C_{2^\alpha}])$ 中,设 $0\leqslant l\leqslant 2^{\alpha-1}-1$,则有下式成立

$$[M_{2l+1}][M_3]=\begin{cases}[M_{2l+3}]+\sum_{t=1}^{2^{\alpha-1}}k_t[M_{2t}],2\mid l,\\[M_{2l-1}]+\sum_{t=1}^{2^{\alpha-1}}k_t[M_{2t}],2\nmid l,\end{cases}\tag{7}$$

其中 $k_t$ 是非负整数。

**证明** 易知 $\alpha=2$ 时所证结论成立。对 $\alpha$ 用归纳法,下证对 $\alpha+1$ 有所证结论成立。

当 $0\leqslant l\leqslant 2^{\alpha-1}-1$ 时,由归纳假设有

$$[M_{2l+1}][M_3]=\begin{cases}[M_{2l+3}]+\sum_{t=1}^{2^{\alpha-1}}k_t[M_{2t}],2\mid l,\\[M_{2l-1}]+\sum_{t=1}^{2^{\alpha-1}}k_t[M_{2t}],2\nmid l,\end{cases}$$

成立。

当 $2^{\alpha-1}\leqslant l\leqslant 2^\alpha-1$ 时,由归纳假设有

$$[M_{2(2^\alpha-l-1)+1}][M_3]=\begin{cases}[M_{2^{\alpha+1}-2l+1}]+\sum_{t=1}^{2^{\alpha-1}}k_t[M_{2t}],2\nmid l,\\[M_{2^{\alpha+1}-2l-3}]+\sum_{t=1}^{2^{\alpha-1}}k_t[M_{2t}],2\mid l.\end{cases}$$

因此应用式(1),可知式(7)成立。

**引理 2.4** 在 $\mathrm{Rep}(F[C_{2^\alpha}])$ 中,设 $2\leqslant\alpha$,$1\leqslant l\leqslant 2^{\alpha-1}-1$ 且 $2\nmid l$,则有

$$[M_{2l+1}][M_{2l-1}]=[M_3]+\sum_{t=1}^{\alpha}k_t[M_{2^t}],\tag{8}$$

其中 $k_t$ 是非负整数。

**证明**　易知 $\alpha=2$ 时所证结论成立。对 $\alpha$ 用归纳法，下证对 $\alpha+1$ 有所证结论成立。

当 $1\leqslant l\leqslant 2^{\alpha-1}-1$ 且 $2\nmid l$ 时，由归纳假设有

$$[M_{2l+1}][M_{2l-1}]=[M_3]+\sum_{t=1}^{\alpha}k_t[M_{2^t}]$$

成立。

当 $2^{\alpha-1}+1\leqslant l\leqslant 2^{\alpha}-1$ 且 $2\nmid l$ 时，由归纳假设，有

$$[M_{2(2^\alpha-l)+1}][M_{2(2^\alpha-l)-1}]=[M_3]+\sum_{t=1}^{\alpha}k_t[M_{2^t}],$$

因此应用式(3)，可知式(8)成立。

**引理 2.5**　在 $\mathrm{Rep}(F[C_{2^\alpha}])$ 中，设 $1\leqslant i\leqslant 2^{\alpha-1}$，$1\leqslant j\leqslant 2^\alpha$，则

$$[M_{2i}][M_j]=\sum_{t=1}^{2^{\alpha-1}}k_t[M_{2t}].\tag{9}$$

其中 $k_t$ 是非负整数。

**证明**　因为 $[M_2][M_3]=[M_2]+[M_4]$，所以结合推论 1.1，易知式(9)对 $\alpha=1,2$ 成立。对 $\alpha$ 做归纳，下证对 $\alpha+1$ 有所证结论成立。

不妨设式(9)中 $j\neq 2^\alpha$（否则结论显然成立）。由归纳假设有 $[M_{2^\alpha-2i}][M_{2^\alpha-j}]=\sum_{t=1}^{2^{\alpha-1}}k_t[M_{2t}]$，用定理 1.1 有

$$[M_{2^\alpha+2i}][M_{2^\alpha+j}]=\sum_{t=1}^{2^\alpha}k'_t[M_{2t}],$$

$$[M_{2^\alpha+2i}][M_{2^\alpha-j}]=\sum_{t=1}^{2^\alpha}k''_t[M_{2t}],$$

$$[M_{2^\alpha-2i}][M_{2^\alpha+j}]=\sum_{t=1}^{2^\alpha}k'''_t[M_{2t}],$$

其中 $k'_t$、$k''_t$ 和 $k'''_t$ 都是非负整数。

**命题 2.1**　设 $P$ 是 $\mathrm{Rep}(F[C_{2^\alpha}])$ 的素理想。

1) 设 $1\leqslant k\leqslant\alpha$。当 $[M_{2^{k+1}}],\cdots,[M_{2^\alpha}]\in P$，$[M_{2^k}]\notin P$ 时（这里 $k=\alpha$ 时 $[M_{2^\alpha}]\notin P$）。

(i) 对任意 $1\leqslant i\leqslant 2^k$，有 $[M_i]-i\in P$，$[M_{2^k+i}]-(2^k-i)\in P$；

(ii) 对任意的 $1\leqslant i\leqslant 2^k$，$2\leqslant t\leqslant 2^{\alpha-k}-1$，有

$$[M_{t2^k+i}][M_{t2^k+i}]-\begin{cases}i^2\in P,2\mid t\\(2^k-i)^2\in P,2\nmid t\end{cases}\in P。$$

2) 当 $[M_2],[M_{2^2}],\cdots,[M_{2^\alpha}]\in P$ 时，对任意 $1\leqslant i\leqslant 2^{\alpha-1}$，有 $[M_{2i}]\in P$，$[M_{2i-1}][M_{2i-1}]-1\in P$。

**证明**　1)(i) 由 $([M_i]-i)[M_{2^k}]=0$，可以得到 $[M_i]-i\in P$。由式(4)可以得到 $([M_{2^k+i}]-2^k+i)[M_{2^k}]\in P$，从而 $[M_{2^k+i}]-(2^k-i)\in P$。

(ii) 由式(4)，$[M_{2\cdot 2^k+i}][M_{2^k}]-(i[M_{3\cdot 2^k}]+(2^k-i)[M_{2\cdot 2^k}])=0$，对该式乘 $[M_{2\cdot 2^k+i}]$，由引理 2.2，可知 $[M_{2\cdot 2^k+i}][M_{2\cdot 2^k+i}]-i^2\in P$。依次下去即得所证。

2) 易知 $\alpha=1,2$ 时结论成立。设对任意 $\beta<\alpha$，在 $\mathrm{Rep}(F[C_{2^\alpha}])$ 中有所证结论成立。

因为 $[M_3][M_3]=[M_1]+2[M_4]$，所以根据已知条件 $[M_3][M_3]-1\in P$，从而 $[M_3]\notin P$。由式(8)，对任意的 $2\nmid t$ 有 $[M_t]\notin P$。

设 $1\leqslant i\leqslant 2^{\alpha-2}-1$，由式(9)可得

$$[M_{2^{\alpha-1}-2i}][M_{2^{\alpha-1}-1}]-\sum_{t=1}^{2^{\alpha-2}}k_t[M_{2t}]=0,$$

从而有 $[M_{2^{\alpha-1}+2i}][M_{2^{\alpha-1}+1}]-k_{2^\alpha}[M_{2^\alpha}]-\sum_{t=1}^{2^{\alpha-2}}k_t[M_{2t}]=0$。根据归纳假设，$[M_{2^{\alpha-1}+2i}][M_{2^{\alpha-1}+1}]\in P$，所以 $[M_{2^{\alpha-1}+2i}]\in P$。

下设 $0\leqslant l\leqslant 2^{\alpha-2}-1$。

当 $2\mid l$ 时，由式(7)，有

$$[M_{2^{\alpha-1}+2l+1}][M_3]-[M_{2^{\alpha-1}+2l+3}]-\sum_{t=1}^{2^k}k_t[M_{2t}]=0,$$

对该式两边乘 $[M_{2^{\alpha-1}+2l+1}]$，再由式(8)可知

$$[M_{2^{\alpha-1}+2l+1}][M_{2^{\alpha-1}+2l+1}]-1\in P.$$

当 $2\nmid l$ 时，同理有 $[M_{2^{\alpha-1}+2l+1}][M_{2^{\alpha-1}+2l+1}]-1\in P$。

**定理 2.1**　在 $R_\alpha=\mathrm{Rep}(F[C_{2^\alpha}])$ 中，极小素理想 $P$ 一定形如下面 4 种形式：

1) $([M_i]-i\mid 2\leqslant i\leqslant 2^\alpha)$；

2) $([M_{2^\alpha}])+([M_i]-i\mid 2\leqslant i\leqslant 2^{\alpha-1})+([M_{2^{\alpha-1}+i}]-(2^{\alpha-1}-i)\mid 0<i<2^{\alpha-1})$；

3) 设 $1\leqslant k\leqslant\alpha-2$，则 $([M_{2^\alpha}],\cdots,[M_{2^{k+1}}])+([M_i]-i\mid 2\leqslant i\leqslant 2^k)+([M_{2^k+i}]-(2^k-i)\mid 1\leqslant i\leqslant 2^k)+([M_{t2^k+i}]-k_{t2^k+i}\mid 2\leqslant t\leqslant 2^{\alpha-k}-1,1\leqslant i\leqslant 2^k)$，其中当 $2\mid t$ 时，$|k_{t2^k+i}|=i$，而当 $2\nmid t$ 时，$|k_{t2^k+i}|=2^k-i$，再按照如下规则确定 $|k_{t2^k+i}|$ 的正负号：令 $k+1\leqslant l\leqslant\alpha-1$，任意选取 $k_{2^l+1}$ 的正负号，再随着 $l$ 从小到大，依次按照 $k_{2^l+1}k_{2^l+w}=k_w(k_1=1)$，$1\leqslant w\leqslant 2^l$，确定 $k_{2^l+w}$ 的正负号；

4) $([M_{2i}]\mid 1\leqslant i\leqslant 2^{\alpha-1})+([M_{2i+1}]-k_{2i+1}$

$\mid 1\leqslant i<2^{\alpha-1})$，其中 $|k_{2i+1}|=1$，对每个 $1\leqslant l\leqslant \alpha-1$，指定 $k_{2^l+1}$ 的正负号，再随着 $l$ 从小到大，依次按照 $k_{2^l+1}k_{2^l+2w-1}=k_{2w-1}$，$1\leqslant w\leqslant 2^{l-1}$，确定 $k_{2^l+2w-1}$ 的正负号。

**证明** 由命题 1.1，$R_\alpha$ 的素理想和 $\mathbf{Z}[x_2,\cdots,x_{2^\alpha}]$ 中包含 $I_{2^\alpha}$（命题 1.1 中的理想）的素理想一一对应。因为有环同构

$$\mathbf{Z}[x_2,\cdots,x_{2^\alpha}]/(x_i-k_i\mid 2\leqslant i\leqslant 2^\alpha)\cong\mathbf{Z},$$

所以 $(x_i-k_i\mid 2\leqslant i\leqslant 2^\alpha)$ 是 $\mathbf{Z}[x_2,\cdots,x_{2^\alpha}]$ 中的素理想。因此只需证明在 $\mathbf{Z}[x_2,\cdots,x_{2^\alpha}]$ 中 $I_{2^\alpha}$ 包含 $(x_i-k_i\mid 2\leqslant i\leqslant 2^\alpha)$。

又因为对于 $\mathbf{Z}[x_2,\cdots,x_{2^\alpha}]$ 中的理想 $(x_i-k_i\mid 2\leqslant i\leqslant 2^\alpha)$ 有 $f(x_2,\cdots,x_{2^\alpha})\in(x_i-k_i\mid 2\leqslant i\leqslant 2^\alpha)$ 当且仅当 $f(k_2,\cdots,k_{2^\alpha})=0$。所以，只需证明对 $I_{2^\alpha}$ 中的全体形如 $x_ix_j-(x_{\beta_1}+\cdots+x_{\beta_n})$（其中 $1\leqslant i,j\leqslant 2^\alpha$，规定 $x_1=1$）的生成元满足

$$k_ik_j-(k_{\beta_1}+\cdots+k_{\beta_n})=0,$$

其中 $k_1=1$。

1）对任意 $1\leqslant i\leqslant 2^\alpha$，有 $k_i=i$，由

$$[M_i][M_j]=[M_{\beta_1}]+\cdots+[M_{\beta_n}]$$

两边的 $F$ 维数相等，所以 $ij-(\beta_1+\cdots+\beta_n)=0$。因此 $k_ik_j-(k_{\beta_1}+\cdots+k_{\beta_n})=0$，故 $I_{2^\alpha}\subset(x_i-k_i\mid 2\leqslant i\leqslant 2^\alpha)$。

2）对任意 $1\leqslant i\leqslant 2^{\alpha-1}$，有 $k_i=i$，$k_{2^{\alpha-1}+i}=2^{\alpha-1}-i$。

下设 $1\leqslant i,j<2^{\alpha-1}$。

设 $x_{2^{\alpha-1}-i}x_{2^{\alpha-1}-j}-(x_{\beta_1}+\cdots+x_{\beta_n})\in I_{2^\alpha}$，于是由

$$[M_{2^{\alpha-1}-i}][M_{2^{\alpha-1}-j}]=[M_{\beta_1}]+\cdots+[M_{\beta_n}]$$

两边的 $F$ 维数相等，可得

$$k_{2^{\alpha-1}-i}k_{2^{\alpha-1}-j}-(k_{\beta_1}+\cdots+k_{\beta_n})=0.$$

由定理 1.1 可知，$x_{2^{\alpha-1}+i}x_{2^{\alpha-1}+j}-(x_{\beta_1}+\cdots+x_{\beta_n}+mx_{2^\alpha})$（其中 $m$ 是整数）是 $I_{2^\alpha}$ 的生成元之一。又因为 $k_{2^{\alpha-1}-i}=2^{\alpha-1}-i=k_{2^{\alpha-1}+i}$，$k_{2^\alpha}=0$，于是

$$k_{2^{\alpha-1}+i}k_{2^{\alpha-1}+j}-(k_{\beta_1}+\cdots+k_{\beta_n}+mk_{2^\alpha})=0,$$

从而 $x_{2^{\alpha-1}+i}x_{2^{\alpha-1}+j}-(x_{\beta_1}+\cdots+x_{\beta_n}+mx_{2^\alpha})\in(x_i-k_i\mid 2\leqslant i\leqslant 2^\alpha)$。

同理由定理 1.1 可知，$x_{2^{\alpha-1}+i}x_{2^{\alpha-1}-j}-(x_{2^{\alpha-1}+(2^{\alpha-1}-\beta_1)}+\cdots+x_{2^{\alpha-1}+(2^{\alpha-1}-\beta_n)}+mx_{2^\alpha})$（其中 $m$ 是整数）是 $I_{2^\alpha}$ 的生成元之一。又因为 $k_{2^{\alpha-1}+i}k_{2^{\alpha-1}-j}-(k_{2^\alpha-\beta_1}+\cdots+k_{2^\alpha-\beta_n}+mk_{2^\alpha})=k_{2^{\alpha-1}-i}k_{2^{\alpha-1}-j}-(k_{\beta_1}+\cdots+k_{\beta_n})=0$，所以 $x_{2^{\alpha-1}+i}x_{2^{\alpha-1}-j}-(x_{\gamma_1}+\cdots+x_{\gamma_n})\in(x_i-k_i\mid 2\leqslant i\leqslant 2^\alpha)$，显然 $x_{2^\alpha}x_{2^{\alpha-1}\pm j}-(2^{\alpha-1}\pm j)x_{2^\alpha}\in(x_i-k_i\mid 2\leqslant i\leqslant 2^\alpha)$。

综上 $I_{2^\alpha}\subset(x_i-k_i\mid 2\leqslant i\leqslant 2^\alpha)$。

3）对任意 $1\leqslant i\leqslant 2^k$，有 $k_i=i$，$k_{2^k+i}=2^k-i$。

设 $1\leqslant l$，$w=t_12^k+i$，其中 $0\leqslant t_1<2^l$，$1\leqslant i\leqslant 2^k$。于是根据本定理中的定义有

$$|k_{2^{k+l}+w}|=|k_w|=\begin{cases}i, & 2\mid t_1,\\ 2^k-i, & 2\nmid t_1.\end{cases}$$

首先，设 $k=\alpha-2$，$1\leqslant i,j<2^{\alpha-1}$。由本定理的 2）可知，对生成元 $x_ix_j-(x_{\beta_1}+\cdots+x_{\beta_n})\in I_{2^{\alpha-1}}\subset I_{2^\alpha}$ 有 $k_ik_j-(k_{\beta_1}+\cdots+k_{\beta_n})=0$，所以

$x_ix_j-(x_{\beta_1}+\cdots+x_{\beta_n})\in(x_i-k_i\mid 2\leqslant i\leqslant 2^\alpha)$。设生成元 $x_{2^{\alpha-1}-i}x_{2^{\alpha-1}-j}-(x_{\gamma_1}+\cdots+x_{\gamma_n})\in I_{2^{\alpha-1}}\subseteq I_{2^\alpha}$（因为 $1\leqslant i,j<2^{\alpha-1}$，所以 $2^{\alpha-1}-i$ 和 $2^{\alpha-1}-j$ 都不为 0）. 于是有生成元 $x_{2^{\alpha-1}+i}x_{2^{\alpha-1}+j}-(x_{\gamma_1}+\cdots+x_{\gamma_n}+mx_{2^\alpha})\in I_{2^\alpha}$（其中 $m$ 是整数）. 由定理中的定义，有

$$\begin{aligned}k_{2^{\alpha-1}+1}k_{2^{\alpha-1}+i}&=k_i\\&=k_{2^{\alpha-1}-i}\\&=\begin{cases}i, & 1\leqslant i\leqslant 2^{\alpha-2},\\ 2^{\alpha-2}-(i-2^{\alpha-2}), & 2^{\alpha-2}+1\leqslant i\leqslant 2^{\alpha-1},\end{cases}\end{aligned}$$

所以 $k_{2^{\alpha-1}-i}k_{2^{\alpha-1}-j}=k_{2^{\alpha-1}+i}k_{2^{\alpha-1}+j}$。因此 $k_{2^{\alpha-1}+i}k_{2^{\alpha-1}+j}-(k_{\gamma_1}+\cdots+k_{\gamma_n}+mk_{2^\alpha})=k_{2^{\alpha-1}-i}k_{2^{\alpha-1}-j}-(k_{\gamma_1}+\cdots+k_{\gamma_n})=0$。因此 $x_{2^{\alpha-1}+i}x_{2^{\alpha-1}+j}-(x_{\gamma_1}+\cdots+x_{\gamma_n}+mx_{2^\alpha})\in(x_i-k_i\mid 2\leqslant i\leqslant 2^\alpha)$。

再设 $x_ix_{2^{\alpha-1}-j}-(x_{\gamma_1}+\cdots+x_{\gamma_n})\in I_{2^{\alpha-1}}\subseteq I_{2^\alpha}$，于是有 $x_{2^{\alpha-1}+i}x_{2^{\alpha-1}-j}-(x_{2^{\alpha-1}+\gamma_1}+\cdots+x_{2^{\alpha-1}+\gamma_n}+mx_{2^\alpha}+m'x_{2^{\alpha-1}})\in I_{2^\alpha}$（其中 $m$ 是整数）。所以 $k_{2^{\alpha-1}+i}k_{2^{\alpha-1}-j}-(k_{2^{\alpha-1}+\gamma_1}+\cdots+k_{2^{\alpha-1}+\gamma_n})=k_{2^{\alpha-1}+1}(k_ik_{2^{\alpha-1}-j}-(k_{\gamma_1}+\cdots+k_{\gamma_n}))=0$。因此 $x_{2^{\alpha-1}+i}x_{2^{\alpha-1}-j}-(x_{2^{\alpha-1}+\beta_1}+\cdots+x_{2^{\alpha-1}+\beta_n}+mx_{2^\alpha}+m'x_{2^{\alpha-1}})\in(x_i-k_i\mid 2\leqslant i\leqslant 2^\alpha)$，显然 $x_{2^\alpha}x_{2^{\alpha-1}\pm j}-(2^{\alpha-1}\pm j)x_{2^\alpha}\in(x_i-k_i\mid 2\leqslant i\leqslant 2^\alpha)$。

综上，$k=\alpha-2$ 时 $I_{2^\alpha}\subset(x_i-k_i\mid 2\leqslant i\leqslant 2^\alpha)$。

当 $k=\alpha-3$ 时，设 $1\leqslant i,j\leqslant 2^{\alpha-1}$，由本定理 2）和上面刚刚所证的结果可得 $x_ix_j-(x_{\beta_1}+\cdots+x_{\beta_n})\in I_{2^\alpha}$ 时，有

$$x_ix_j-(x_{\beta_1}+\cdots+x_{\beta_n})\in(x_i-k_i\mid 2\leqslant i\leqslant 2^\alpha)。$$

其余与上面同理可证。

依次下去,可知对每个 $1 \leqslant k \leqslant \alpha-2$ 有

$$I_{2^\alpha} \subset (x_i - k_i \mid 2 \leqslant i \leqslant 2^\alpha).$$

4) $\alpha=1,2$ 时结论成立。对 $\alpha$ 做归纳,下证对 $\alpha$ 有所证结论成立。

由命题 2.1(2)可知,对任意 $1 \leqslant l \leqslant 2^{\alpha-1}$ 有 $[M_{2l}] \in P$,因此 $k_{2l}=0$. 由式(9),不妨设 $1 \leqslant i, j \leqslant 2^{\alpha-1}$ 且 2 不能整除 $i,j$。

当生成元 $x_ix_j-(x_{\beta_1}+\cdots+x_{\beta_n}) \in I_{2^{\alpha-1}} \subset I_{2^\alpha}$ 时,根据归纳假设有 $x_ix_j-(x_{\beta_1}+\cdots+x_{\beta_n}) \in (x_i - k_i \mid 2 \leqslant i \leqslant 2^\alpha)$。此时由定理 1.1 可得

$$x_{2^{\alpha-1}-i}x_{2^{\alpha-1}-j}-(x_{\beta_1}+\cdots+x_{\beta_n}+m'x_{2^{\alpha-1}}) \in I_{2^\alpha},$$

$$x_{2^{\alpha-1}+i}x_{2^{\alpha-1}+j}-(x_{\beta_1}+\cdots+x_{\beta_n}+mx_{2^\alpha}) \in I_{2^\alpha},$$

其中 $m'$ 和 $m$ 是整数。因此根据归纳假设 $k_{2^{\alpha-1}-i}k_{2^{\alpha-1}-j}=k_{\beta_1}+\cdots+k_{\beta_n}=k_ik_j$, 又因为 $k_{2^{\alpha-1}+i}k_{2^{\alpha-1}+j}=(k_{2^{\alpha-1}+1}k_{2^{\alpha-1}+i})(k_{2^{\alpha-1}+1}k_{2^{\alpha-1}+j})=k_ik_j$,所以 $k_{2^{\alpha-1}-i}k_{2^{\alpha-1}-j}=k_ik_j=k_{2^{\alpha-1}+i}k_{2^{\alpha-1}+j}$。因此

$$x_{2^{\alpha-1}+i}x_{2^{\alpha-1}+j}-(x_{\beta_1}+\cdots+x_{\beta_n}+mx_{2^\alpha}) \in (x_i - k_i \mid 2 \leqslant i \leqslant 2^\alpha).$$

同理由 $x_ix_j-(x_{\beta_1}+\cdots+x_{\beta_n}) \in I_{2^\alpha}$ 可得 $x_{2^{\alpha-1}+i}x_{2^{\alpha-1}-j}-(x_{2^{\alpha-1}+2^{\alpha-1}-\beta_1}+\cdots+x_{2^{\alpha-1}+2^{\alpha-1}-\beta_n}+mx_{2^\alpha}+m'x_{2^{\alpha-1}}) \in I_{2^\alpha}$(其中 $m'$ 和 $m$ 是整数),所以根据归纳假设可得

$$k_{2^{\alpha-1}+i}k_{2^{\alpha-1}-j}-(k_{2^{\alpha-1}+2^{\alpha-1}-\beta_1}+\cdots+k_{2^{\alpha-1}+2^{\alpha-1}-\beta_n})=k_{2^{\alpha-1}+1}(k_ik_{2^{\alpha-1}-j}-(k_{2^{\alpha-1}-\beta_1}+\cdots+k_{2^{\alpha-1}-\beta_n}))=0.$$

因此

$$x_{2^{\alpha-1}+i}x_{2^{\alpha-1}-j}-(x_{\beta_1}+\cdots+x_{\beta_n}+mx_{2^\alpha}) \in (x_i - k_i \mid 2 \leqslant i \leqslant 2^\alpha).$$

综上,$I_{2^\alpha} \subset (x_i - k_i \mid 2 \leqslant i \leqslant 2^\alpha)$。

**推论 2.1**　若 $I$ 是 $\mathrm{Rep}(F[C_{2^\alpha}])$ 的极大理想,则 $I=P+(q)$,其中 $P$ 是定理 2.1 中的极小素理想,$q$ 是一个素数。

**推论 2.2**　1)(i) $\mathrm{Rep}(F[C_{2^\alpha}])$ 中形如定理 2.1 中 1)和 2)的素理想各有 1 个。

(ii) $\mathrm{Rep}(F[C_{2^\alpha}])$ 中形如定理 2.1(3)的素理想有 $2^{\alpha-1}-2$ 个。

(iii) $\mathrm{Rep}(F[C_{2^\alpha}])$ 中形如定理 2.1(4)的素理想有 $2^{\alpha-1}$ 个。

2)所有极大理想构成的集合是无限可数集。

文献[3]证明了 $\mathrm{Rep}(F[C_{2^\alpha}]) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbb{C}$ 是半单环。由于 $\mathbb{C}$ 是代数闭域,所以 $\mathrm{Rep}(F[C_{2^\alpha}]) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbb{C} \cong \bigoplus_{i=1}^{2^\alpha} \mathbb{C}$ 是环同构,因此 $\mathrm{Rep}(F[C_{2^\alpha}]) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbb{C} \cong \bigoplus_{i=1}^{2^\alpha} \mathbb{C}$ 有且只有 $2^\alpha$ 个素理想,且每个素理想都是极大理想。这与推论 2.1 和推论 2.2 是一致的。

**引理 2.6**　在 $\mathrm{Rep}(F[C_{2^\alpha}])$ 中,设 $0 \leqslant i \leqslant 2^{\alpha-1}-1$, $0 \leqslant j \leqslant 2^{\alpha-1}-1$,则 $[M_{2i+1}][M_{2j+1}]$ 的直和分解中有 $[M_1]$ 当且仅当 $i=j$。

**证明**　易知结论对 $\alpha=1,2$ 成立。对 $\alpha$ 用归纳法。设在 $\mathrm{Rep}(F[C_{2^{\alpha-1}}])$ 中有结论成立。设 $0 \leqslant i,j \leqslant 2^{\alpha-2}-1$, $[M_{2^{\alpha-1}+2i+1}][M_{2^{\alpha-1}+2j+1}]=[M_{\beta_1}]+\cdots+[M_{\beta_n}]$, 于是可得 $[M_{2^{\alpha-1}-2i-1}][M_{2^{\alpha-1}-2j-1}]=[M_{\beta_1}]+\cdots+[M_{\beta_n}]+l[M_{2^\alpha}]$,其中 $l$ 是整数。由归纳假设,存在 $\beta_i=1$ 当且仅当 $i=j$。

**引理 2.7**　在 $\mathrm{Rep}(F[C_{2^\alpha}])$ 中,令 $1 \leqslant k \leqslant \alpha$, $1 \leqslant i \leqslant 2^{\alpha-k}$,则 $[M_{2^ki}][M_{2^kj}]$ 的直和分解中有 $[M_{2^k}]$ 当且仅当 $i=j$ 且 $2 \nmid i$。

**证明**　易知对 $\alpha=2$ 成立。设 $\mathrm{Rep}(F[C_{2^{\alpha-1}}])$ 中有结论成立,下证对 $\alpha$ 也成立。

$k=\alpha$ 和 $\alpha-1$ 时结论显然成立。

不妨设 $1 \leqslant i,j \leqslant 2^{\alpha-1-k}-1$ 且 $1 \leqslant k \leqslant \alpha-2$。

设 $[M_{2^{\alpha-1}+2^ki}][M_{2^{\alpha-1}+2^kj}]=[M_{\beta_1}]+\cdots+[M_{\beta_n}]$,于是有 $[M_{2^{\alpha-1}-2^ki}][M_{2^{\alpha-1}-2^kj}]=[M_{\beta_1}]+\cdots+[M_{\beta_n}]+l[M_{2^\alpha}]$,其中 $l$ 是整数。由归纳假设,存在 $\beta_i=2^k$ 当且仅当 $i=j$ 且 $2 \nmid i$。

引理 2.7 可以用如下迭代的形式来表述:

在 $\mathrm{Rep}(F[C_{2^\alpha}])$ 中,令 $1 \leqslant i \leqslant 2^{\alpha-1}$, $y_i^{(1)}=2i$;设 $y_i^{(k-1)}$ 已定义,令 $1 \leqslant i \leqslant 2^{\alpha-k}$, $y_i^{(k)}=y_{2i}^{(k-1)}$,于是 $[M_{y_i^{(k)}}][M_{y_j^{(k)}}]$ 的直和分解中有 $[M_{2^k}]$ 当且仅当 $i=j$ 且 $2 \nmid i$。

**定理 2.2**　$\mathrm{Rep}(F[C_{2^\alpha}])$ 是 reduced 环。

**证明**　设 $x=\sum_{t=1}^{2^\alpha} k_t[M_t]$,并且 $x^2=0$。由引理 2.5 和引理 2.6,可知当 $2 \nmid i$ 时,$k_i=0$。由引理 2.7,依次比较两边 $[M_2],[M_{2^2}],\cdots,[M_{2^\alpha}]$ 的系数可知 $x=0$。

**定理 2.3**　令 $T$ 是定理 2.1 中的所有极小素理想构成的集合,则 $0=\bigcap_{P \in T} P$ 是 0 的极小准素分解。此时 $\mathrm{Rep}(F[C_{2^\alpha}])$ 的所有零因子是 $\bigcup_{P \in T} P$。

**证明**　由定理 2.2,

$$0=\bigcap_{P \in T} P$$

成立。设 $0=\bigcap_{i \in I} q_i$ 是由 $0=\bigcap_{P \in T} P$ 得到的 0 的极小准素分解。由文献[5]的命题 4.6,对 $\mathrm{Rep}(F[C_{2^\alpha}])$ 的每个素理想 $P$,存在 $i \in I$,使得

$\sqrt{q_i} = P$,因此 $0 = \bigcap_{P \in T} P$ 就是极小准素分解。

**推论 2.3** 设 $R = \mathrm{Rep}(F[C_{2^\alpha}])$,${}_RP \to {}_RM \to 0$ 是 $R$ 模 $M$ 的投射盖,则 $M \cong P$ 是 $R$ 模同构。

**证明** 只需证明 $\mathrm{Rep}(F[C_{2^\alpha}])$ 作为 $R$ 模的任一多余子模是 0。由推论 2.1 和定理 2.3, $R$ 的 Jacobson radical $J(R) = 0$,于是 ${}_RR$ 的所有多余子模的和是 0。所以 $P$ 的 Jacobson radical(见文献[6]) $J(P) = 0$。因此 $P$ 的所有多余子模的和为 0。

**定理 2.4** 记 $R = \mathrm{Rep}(F[C_{2^\alpha}])$,$\mathrm{Spec}(R)$ 取 Zariski 拓扑, $\mathbf{Z}$ 取离散拓扑,则 $\mathrm{Mor}_{\mathrm{Top}}(\mathrm{Spec}(R), \mathbf{Z}) \cong \mathbf{Z}$ 是群同构。

**证明** 记 $V(I) = \{p \in \mathrm{Spec}(R) \mid p \supseteq I\}$,其中 $I$ 是 $R$ 的理想。设 $p_i$、$p_j$ 是任意 2 个极小素理想。

易知 $V(p_i)$ 和 $V(p_j)$ 都是 $\mathrm{Spec}(R)$ 的连通拓扑子空间。由于 $p_i + (2) = p_j + (2)$,于是 $\mathrm{Spec}(R)$ 只有一个连通分支。由连续映射保持连通性,可知结论成立。

## 参考文献


[1] Higman D G. Indecomposable representations at characteristic p[J]. Duke Mathematical Journal, 1954, 21(2): 377-381. DOI: 10.1215/s0012-7094-54-02138-9.

[2] Srinivasan B. The modular representation ring of a cyclic p-group[J]. Proceedings of the London Mathematical Society, 1964, 14(4): 677-688. DOI: 10.1112/plms/s3-14.4.677.

[3] Green J A. The modular representation algebra of a finite group[J]. Illinois Journal of Mathematics, 1962, 6(4): 607-619. DOI: 10.1215/ijm/1255632708.

[4] Webb P. A course in finite group representation theory[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2016.

[5] Atiyah M F, MacDonald I G. Introduction to commutative algebra [M]. Reading: Addison-Wesley Publishing Company, 1969.

[6] Anderson F W, Fuller K R. Rings and categories of Modules [M]. 2nd ed. New York: Springer New York, 1992. DOI: 10.1007/978-1-4612-4418-9.