

文章编号:2095-6134(2015)04-0433-04

# 分数阶截断算子的有界性<sup>\*</sup>

崔晓娜<sup>1</sup>, 燕敦彦<sup>2†</sup>

(1 河南师范大学数学与信息科学学院, 河南 新乡 453007; 2 中国科学院大学数学科学学院, 北京 101408)  
(2014 年 10 月 21 日收稿; 2015 年 1 月 9 日收修改稿)

Cui X N, Yan D Y. The boundedness of the fractional truncation operators[J]. Journal of University of Chinese Academy of Sciences, 2015, 32(4): 433-436.

**摘 要** 研究两类截断算子从  $L^p$  到  $L^r$  的有界性问题. 需要指出的是, 对于某个固定的  $p$ , 可得到  $r$  的一个变化区间, 刻画出这个区间与分数阶的关系. 此外, 还给出算子范数上界的一个估计.

**关键词** 奇异积分算子; Minkowski 不等式; Hölder 不等式; Fubini 定理

中图分类号: O171 文献标志码: A doi: 10. 7523/j. issn. 2095-6134. 2015. 04. 001

## The boundedness of the fractional truncation operators

CUI Xiaona<sup>1</sup>, YAN Dunyan<sup>2</sup>

(1 College of Mathematics and Information Science, Henan Normal University, Xinxiang 453007, Henan, China;  
2 School of Mathematical Sciences, University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 101408, China)

**Abstract** In this paper, we consider the boundedness of two kinds of the truncated operators from  $L^p$  to  $L^r$ . For any fixed  $p$  we can obtain a variational interval of  $r$ , and we characterize the relationship between the interval and the fractional operators. We also give an estimate of the upper bound of the norm of the operator.

**Key words** singular operator; Minkowski's inequality; Hölder's inequality; Fubini theorem

我们将研究两类与分数阶奇异积分算子相关的截断算子. 第一类算子记为  $T$ , 其定义为

$$T_{\alpha}f(x) = \int_{|x-y| < 1} \frac{f(y)}{|x-y|^{\alpha}} dy, \tag{1}$$

其中, 参数  $\alpha$  满足  $0 < \alpha < n$ .

第二类算子记为  $K$ , 其定义如下

$$K_{\beta}f(x) = \int_{|x-y| \geq 1} \frac{f(y)}{|x-y|^{\beta}} dy, \tag{2}$$

其中, 参数  $\beta > 0$ .

截断算子有其基本的重要性, 在许多情况下, 截断算子的  $L^p$  有界性与振荡积分算子的有界性是等价的, 因此, 研究振荡积分算子的有界性就可归结为研究截断算子的有界性, 这方面的工作很多, 可参考文献[1-10]. 因此, 对这类算子系统的研究无论在理论上还是在应用上都是有价值的. 对于算子 (1) 而言, 其奇点在 0 处, 奇性的强弱完全依赖于正实数  $\alpha$ ; 对于算子 (2) 而言, 奇点在  $\infty$  处, 奇性的强弱由  $\beta$  决定. 探讨算

<sup>\*</sup> 国家自然科学基金(11471039, 11271162)资助  
<sup>†</sup> 通信作者, E-mail: ydunyan@ucas.ac.cn

子奇性的强弱与算子有界性的关系是本文所要研究的问题之所在. 我们将系统研究这两个算子从  $L^p$  到  $L^r$  的有界性, 特别地, 对于某个固定的  $p$ , 可得到  $r$  的一个变化区间, 将刻画出这个区间与  $\alpha$  或  $\beta$  的关系. 此外, 还将给出算子范数上界的估计.

## 1 主要定理

下面将研究算子 (1) 在  $L^p(\mathbb{R}^n)$  空间上的有界性质, 探讨算子范数上界的估计. 本文的主要定理如下.

**定理 1.1** 设  $T$  是由式子 (1) 定义的截断算子, 其中  $0 < \alpha < n$ , 则下面的两个论述成立.

(1.1) 对于满足  $1 \leq p \leq \frac{n}{n-\alpha}$  的每一个  $p$ ,  $T$  是从  $L^p(\mathbb{R}^n)$  到  $L^r(\mathbb{R}^n)$  有界的, 其中,  $r$  的范围是  $p \leq r < \frac{np}{n+p\alpha-pn}$ , 且

$$\|T\|_{L^p \rightarrow L^r} \leq \left( \frac{\omega_n}{n - q\alpha} \right)^{1/q},$$

其中,  $\omega_n$  是  $\mathbb{R}^n$  中单位球面的面积, 且

$$q = \frac{pr}{pr + p - r}.$$

(1.2) 对于满足  $\frac{n}{n-\alpha} < p \leq \infty$  的每一个  $p$ ,  $T$  是从  $L^p(\mathbb{R}^n)$  到  $L^r(\mathbb{R}^n)$  有界的, 其中,  $r$  的范围是  $p \leq r \leq \infty$ , 且

$$\|T\|_{L^p \rightarrow L^r} \leq \left( \frac{\omega_n}{n - q\alpha} \right)^{1/q},$$

其中,  $\omega_n$  是  $\mathbb{R}^n$  中单位球面的面积, 且

$$q = \frac{pr}{pr + p - r}.$$

**定理 1.2** 设算子  $K$  是由式子 (2) 定义的, 其中  $\beta > 0$ , 则下面的两个结论成立.

(2.1) 当  $0 < \beta \leq n$  时, 对于满足  $1 \leq p < \frac{n}{n-\beta}$  的每一个  $p$ , 算子  $K$  是从  $L^p(\mathbb{R}^n)$  到  $L^r(\mathbb{R}^n)$  有界的, 其中,  $r$  的范围是  $\frac{np}{n+p\alpha-pn} < r \leq \infty$ , 且

$$\|K\|_{L^p \rightarrow L^r} \leq \left( \frac{\omega_n}{q\beta - n} \right)^{1/q},$$

其中,  $\omega_n$  是  $\mathbb{R}^n$  中单位球面的面积

$$q = \frac{pr}{pr + p - r}.$$

(2.2) 当  $\beta > n$  时, 对于满足  $1 \leq p \leq \infty$  的每一

个  $p$ , 算子  $K$  是从  $L^p(\mathbb{R}^n)$  到  $L^r(\mathbb{R}^n)$  有界的, 其中,  $r$  的范围是  $p \leq r \leq \infty$ , 且

$$\|K\|_{L^p \rightarrow L^r} \leq \left( \frac{\omega_n}{q\beta - n} \right)^{1/q},$$

反之, 对于满足  $1 \leq r \leq \infty$  的每一个  $r$ , 算子  $K$  是从  $L^p(\mathbb{R}^n)$  到  $L^r(\mathbb{R}^n)$  有界的, 其中,  $p$  的范围是  $1 \leq p \leq r$ , 且

$$\|K\|_{L^p \rightarrow L^r} \leq \left( \frac{\omega_n}{q\beta - n} \right)^{1/q}.$$

## 2 定理的证明

下面给出定理的证明. 先证明定理 1.1 中的 (1.1). 令

$$g(x) = \chi_{|x| < 1}(x) |x|^{-\alpha}, x \in \mathbb{R}^n.$$

由于  $0 < \alpha < n$ , 若  $\alpha \leq \alpha q < n$ , 即  $1 \leq q < n/\alpha$ , 则通过简单计算可得  $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$ , 那么  $Tf$  可表示为

$$|Tf(x)| = \left| \int_{|x-y| < 1} \frac{f(y)}{|x-y|^\alpha} dy \right| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| |g(x-y)| dy. \quad (3)$$

对于满足  $1 \leq p \leq \frac{n}{n-\alpha}$  的某个固定的  $p$ , 令

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1.$$

当  $q$  从 1 变化到  $\frac{n}{\alpha}$  时, 简单计算可得  $r$  所取到的范围是

$$p \leq r < \frac{np}{n+p\alpha-pn}. \quad (4)$$

令  $p', q'$  分别为  $p, q$  的共轭数, 简单计算可得

$$\frac{1}{p'} + \frac{1}{q'} + \frac{1}{r} = 1,$$

进一步可得

$$\frac{1}{p'} + \frac{1}{q'} + \frac{1}{r} = 1,$$

$$\frac{p}{r} + \frac{p}{q'} = 1,$$

和

$$\frac{q}{r} + \frac{q}{p'} = 1.$$

由 Hölder 不等式可知

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| |g(x-y)| dy &= \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|^{p/q'} (|f(y)|^{p/r} |g(x-y)|^{q/r}) \\ &\quad |g(x-y)|^{q/p'} dy \leq \|f\|_{p'}^{p/q'} \end{aligned}$$

$$\left( \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|^p |g(x-y)|^q dy \right)^{1/r} \\ \left( \int_{\mathbb{R}^n} |g(x-y)|^q dy \right)^{1/p'} =$$

$$\|f\|_p^{p/q'} \|g\|_q^{q/p'} \left( \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|^p |g(x-y)|^q dy \right)^{1/r}. \quad (5)$$

由不等式(3)和(5)再结合 Fubini 定理可知

$$\|Tf\|_r \leq \|f\|_p^{p/q'} \|g\|_q^{q/p'} \\ \left( \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|^p |g(x-y)|^q dy dx \right)^{1/r} \\ = \|f\|_p^{p/q'} \|g\|_q^{q/p'} \|f\|_p^{p/r} \|g\|_q^{q/r} \\ = \|f\|_p \|g\|_q, \quad (6)$$

其中, 当  $p$  和  $r$  固定时

$$q = \frac{pr}{pr + p - r}.$$

进一步, 由不等式(6)可以给出算子范数上界的估计

$$\|T\|_{L^p \rightarrow L^r} \leq \|g\|_q = \left( \int_{|y| < 1} \frac{1}{|y|^{q\alpha}} dy \right)^{1/q} \\ = \left( \omega_n \int_0^1 r^{-q\alpha} r^{n-1} dr \right)^{1/q} \\ = \left( \omega_n \int_0^1 r^{n-q\alpha-1} dr \right)^{1/q} \\ = \left( \frac{\omega_n}{n - q\alpha} \right)^{1/q}.$$

这样就完成了(1.1)的证明.

(1.2)的证明与(1.1)的证明有许多相似之处. 相同部分省略. 令

$$g(x) = \chi_{|x| < 1}(x) |x|^{-\alpha}, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

对于满足  $\frac{n}{n-\alpha} < p \leq \infty$  的某个固定的  $p$ , 显然可知

$$1 \leq p' < \frac{n}{\alpha}. \quad \text{令}$$

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1,$$

当  $q$  从 1 变化到  $p'$  时, 简单计算可得  $r$  所取到的范围是  $p \leq r \leq \infty$ . 用与证明(1.1)完全相同的方法可得

$$\|Tf\|_r \leq \|g\|_q \|f\|_p,$$

且

$$\|T\|_{L^p \rightarrow L^r} \leq \left( \frac{\omega_n}{n - q\alpha} \right)^{1/q},$$

其中, 当  $p$  和  $r$  固定时,

$$q = \frac{pr}{pr + p - r}.$$

这样就完成了定理 1.1 的证明.

下面给出定理 1.2 的证明. 先证明(2.1). 令

$$g(x) = \chi_{|x| \geq 1}(x) |x|^{-\beta}, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

注意到  $0 < \beta \leq n$ , 若  $n < \beta q \leq \infty$ , 即  $n/\beta < q \leq \infty$ , 则直接计算可得  $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$ . 同样地,  $|Kf(x)|$  可表示为

$$|Kf(x)| = \left| \int_{|x-y| \geq 1} \frac{f(y)}{|x-y|^\beta} dy \right| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| |g(x-y)| dy. \quad (7)$$

对于满足  $1 \leq p \leq \frac{n}{n-\beta}$  的每个固定的  $p$ , 令

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1.$$

当  $q \in (n/\beta, \infty]$ , 简单计算可得  $r$  所取到的范围是

$$\frac{np}{n + p\alpha - pn} < r \leq \infty. \quad (8)$$

令  $p', q'$  分别为  $p, q$  的共轭数, 利用与证明(1.1)完全相同的方法可得

$$\|Tf\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_{q'}. \quad (9)$$

进一步, 由不等式(9)可以给出算子一个上界范数的估计

$$\|T\|_{L^p \rightarrow L^r} \leq \|g\|_q \\ = \left( \int_{|y| \geq 1} \frac{1}{|y|^{q\beta}} dy \right)^{1/q} \\ = \left( \omega_n \int_1^\infty r^{-q\beta} r^{n-1} dr \right)^{1/q} \\ = \left( \omega_n \int_1^\infty r^{n-q\beta-1} dr \right)^{1/q} \\ = \left( \frac{\omega_n}{q\beta - n} \right)^{1/q}.$$

这样就完成了(2.1)的证明.

下面证明(2.2). 令

$$g(x) = \chi_{|x| < 1}(x) |x|^{-\beta}, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

由于  $\beta > n$ , 对一切  $q \in [1, \infty]$  显然可知  $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$ . 对于满足  $1 \leq p \leq \infty$  的每一个  $p$ , 令

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1,$$

当  $q$  取遍  $[1, p']$  时, 简单计算可得  $r$  所取到的范围是  $p \leq r \leq \infty$ . 用与证明(2.1)完全相同的方法可得

$$\|Tf\|_r \leq \|g\|_q \|f\|_p, \quad (10)$$

且

$$\|T\|_{L^p \rightarrow L^r} \leq \left( \frac{\omega_n}{n - q\alpha} \right)^{1/q}.$$

进一步,对于满足  $1 \leq r \leq \infty$  的每一个的  $r$ , 令

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1,$$

则

$$\frac{1}{p} = 1 + \frac{1}{r} - \frac{1}{q}. \quad (11)$$

由于  $\beta > n$ , 对一切  $q \in [1, r]$  可得  $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$ . 让  $q$  从 1 变化到  $r$ , 则  $p$  也从 1 变化到  $r$ . 前面的证明表明, 只要  $1 \leq p, q, r \leq \infty$  满足等式 (11), 则算子  $K$  就是从  $L^p(\mathbb{R}^n)$  到  $L^r(\mathbb{R}^n)$  有界的, 且  $p$  的范围是  $[1, r]$ . 而且, 可以给出算子范数的一个上界估计,

$$\|K\|_{L^p \rightarrow L^r} \leq \left( \frac{\omega_n}{q\beta - n} \right)^{1/q}.$$

这样就完成了定理 1.2 的证明.

由定理 1.1 和定理 1.2 可以看出, 对同一个  $p$ , 存在一个区间, 这个区间依赖于奇次阶  $\alpha$  或  $\beta$ , 对这个区间上的两个不同的值  $r_1$  和  $r_2$ , 算子既是从  $L^p(\mathbb{R}^n)$  到  $L^{r_1}(\mathbb{R}^n)$  有界的, 也是从  $L^p(\mathbb{R}^n)$  到  $L^{r_2}(\mathbb{R}^n)$  有界的. 不等式 (4) 和不等式 (8) 分别刻画了  $r$  范围与奇次阶  $\alpha$  及  $\beta$  的关系.

## 参考文献

- [1] Lu S Z, Ding Y, Yan D Y. Singular integral and related topics[M]. World Scientific Publishing Co Pte Ltd, 2007: 144-148.
- [2] Lu S Z, Zhang Y. Criterion on  $L^p$  boundedness for a class of oscillatory singular integrals with rough kernels[J]. Rev. Mat. Iber., 1992(8): 201-219.
- [3] Lu S Z, Yan D Y.  $L^p$ -boundedness of multilinear oscillatory singular integrals with Calderon-Zygmund kernel[J]. Science in China (Series A), 2002, 45(2): 196-213.
- [4] Shi Z S, Yan D Y. Criterion on  $L^{p_1} \times L^{p_2} \rightarrow L^q$ -boundedness for oscillatory bilinear hilbert transform[J]. Abstract and Applied Analysis, Volume 2014, Article ID 712 051.
- [5] 陆善镇, 王昆阳. 实分析[M]. 北京: 北京师范大学出版社, 2006.
- [6] 丁勇. 现代分析基础[M]. 北京: 北京师范大学出版社, 2008: 143-149.
- [7] Grafakos L. Classical fourier analysis[M]. 2nd ed. Springer-Verlag, Graduate Texts in Mathematics 249, 2008: 77-82.
- [8] Stein E, Weiss G. Introduction to Fourier analysis on euclidean spaces[M]. Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1971: 53-75.
- [9] Fernandez D. Vector-valued singular integral operators on  $L^p$ -spaces with mixed norms and applications[J]. Pacific J Math, 1987, 129: 257-275.
- [10] Stefanov A, Torres R. Calderón-Zygmund operators on mixed Lebesgue spaces and applications to null forms[J]. J London Math Soc, 2004, 70(2): 447-462.