

# HCMU 度量的一个存在性定理和能量积分公式\*

魏志强, 吴英毅<sup>†</sup>

(中国科学院大学数学科学学院, 北京 101408)

(2014 年 10 月 8 日收稿; 2015 年 3 月 6 日收修改稿)

Wei Z Q, Wu Y Y. An existence theorem and energy integral formula of HCMU metrics[J]. Journal of University of Chinese Academy of Sciences, 2016, 33(1): 16-22.

**摘 要** HCMU 度量是紧黎曼面上带奇点的 extremal Kähler 度量. 本文给出一个带锥奇点的非常曲率 HCMU 度量(non-CSC HCMU 度量)的存在性定理, 并讨论一般 non-CSC HCMU 度量的能量积分公式.

**关键词** extremal Kähler 度量; extremal Hermitian 度量; non-CSC HCMU 度量; 锥奇点; cusp 奇点

中图分类号: O186.1 文献标志码: A doi:10.7523/j.issn.2095-6134.2016.01.003

## An existence theorem and energy integral formula of HCMU metrics

WEI Zhiqiang, WU Yingyi

(School of Mathematical Sciences, University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 101408, China)

**Abstract** An HCMU metric is an extremal Kähler metric with singularities on a compact Riemann surface. We prove an existence theorem of non-CSC HCMU metrics with conical singularities, and discuss the energy integral formula for general non-CSC HCMU metrics.

**Key words** extremal Kähler metric; extremal Hermitian metric; non-CSC HCMU metric; conical singularity; cusp singularity

本文主要研究紧黎曼面上的 HCMU 度量问题.

### 1 背景和主要定理

一般意义上的 extremal Kähler 度量最早由 Calabi 在文献[1]中提出, 目的是在一个紧 Kähler 流形的固定 Kähler 类中找到最好的度量. 具体地, 设  $M$  为一个紧 Kähler 流形, 在一个固定的

Kähler 类中, extremal Kähler 度量是下述 Calabi 能量的临界点

$$C(g) = \int_M R^2 dg,$$

这里  $R$  是 Kähler 类中度量  $g$  的数量曲率,  $C(g)$  的欧拉-拉格朗日方程是

$$R_{,\alpha\beta} = 0, 1 \leq \alpha, \beta \leq \dim_{\mathbb{C}} M, \quad (1)$$

这里  $R_{,\alpha\beta}$  是  $R$  的 2 阶  $(0, 2)$  型协变导数. 因此我

\* 国家自然科学基金(11471308)资助

<sup>†</sup> 通信作者, E-mail: wuyy@ucas.ac.cn

们称在一个紧 Kähler 流形  $M$  上满足(1) 的度量为 extremal Kähler 度量.

当  $M$  是紧黎曼面时, Calabi 在文献[1] 中证明 extremal Kähler 度量就是常曲率(CSC)度量. 自然地问题是如果在紧黎曼面上 extremal Kähler 度量有奇点, 是不是仍是常曲率度量. 答案是否定的. 在紧黎曼面上带奇点的 extremal Kähler 度量通常被称为 HCMU (the Hessian of the curvature of the metric is umbilical) 度量. 文献[2] 给出了只带 cusp 奇点的 HCMU 度量的分类, 其中在球面上确实存在非常曲率的 HCMU 度量. 下文中我们简称非常曲率的 HCMU 度量为 non-CSC HCMU 度量. 之后, 文献[3] 研究带锥奇点的 non-CSC HCMU 度量, 研究了它的构造, 并给出了一个这种 HCMU 度量存在的障碍性定理. 文献[4] 给出带锥奇点的 non-CSC HCMU 度量的局部结构, 证明了任何一个带锥奇点的 non-CSC HCMU 度量都是由一些结构最简单的带锥奇点的 non-CSC HCMU 度量粘起来的, 这种结构最简单的带锥奇点的 non-CSC HCMU 度量称为 football. 文献[4] 还给出了任意两个 football 能粘在一起的充要条件. 接下来, 文献[5] 用复分析的方法给出了带锥奇点的 non-CSC HCMU 度量, 得到了任何一个带锥奇点的 non-CSC HCMU 度量都与一个底流形上特殊的亚纯 1-形式有关, 这种亚纯 1-形式被称为该 HCMU 度量的特征 1-形式. 文献[6] 将文献[5] 中的结果推广到了既带锥奇点又带 cusp 奇点的 non-CSC HCMU 度量上.

本文将利用上述结果研究两方面问题. 第一是带锥奇点的 non-CSC HCMU 度量的存在性问题, 第二是关于 non-CSC HCMU 度量的能量积分问题.

第一个问题的结果如下:

**定理 1.1** 令  $p_1, p_2, p_3$  为  $S^2$  上任意 3 个点,  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  为正实数且都不为 1. 则在  $S^2$  上存在以  $p_1, p_2, p_3$  为锥奇点并且锥角度分别为  $2\pi\alpha_1, 2\pi\alpha_2, 2\pi\alpha_3$  的 non-CSC HCMU 度量的充要条件为  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  中至少有一个整数.

第二个问题的结果如下:

**定理 1.2** 设  $M$  为紧黎曼面,  $p_1, p_2, \dots, p_N$  为  $M$  上  $N$  个点,  $g$  为  $M$  上 non-CSC HCMU 度量, 并且以  $p_1, p_2, \dots, p_N$  为奇点. 又设  $K$  为  $g$  的高斯曲率,

$\{q_1, q_2, \dots, q_s\} \subset M \setminus \{p_1, p_2, \dots, p_N\}$  为  $K$  的光滑极值点集,  $\omega$  为  $g$  的特征 1-形式. 记  $M' = M \setminus \{p_1, p_2, \dots, p_N, q_1, q_2, \dots, q_s\}$ , 令

$$C_n(g) = \int_{M'} K^n dg, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

称为  $g$  的第  $n$  个能量积分. 则

$$C_n(g) = \frac{6\alpha_{\max}(K_1^{n+1} - K_2^{n+1})}{(n+1)(K_1 - K_2)(K_2 + 2K_1)},$$

这里  $\alpha_{\max}$  表示  $K$  的最大值点处的锥角度之和,  $K_1$  和  $K_2$  分别表示  $K$  的最大和最小值.

注: 在定理 1.2 中,  $g$  可以是只带锥奇点的 non-CSC HCMU 度量, 也可以是既带锥奇点又带 cusp 奇点的 non-CSC HCMU 度量. 事实上, 文献[4] 已经计算出了一个 football 的面积, 再利用文献[4] 中得到的任意两个 football 能粘在一起的充要条件(见下文定理 2.3), 可以得到任何一个带锥奇点的 non-CSC HCMU 度量的面积. 文献[5] 定义了带锥奇点的 non-CSC HCMU 度量的特征 1-形式, 并且说明利用特征 1-形式也能计算出带锥奇点的 non-CSC HCMU 度量的面积和 Calabi 能量, 但是没有给出具体的公式. 文献[6] 将文献[5] 的结果推广到了带锥奇点和 cusp 奇点的 non-CSC HCMU 度量上, 也定义了相应的特征 1-形式. 定理 1.2 利用 non-CSC HCMU 度量的特征 1-形式给出了只带锥奇点以及既带锥奇点又带 cusp 奇点的 non-CSC HCMU 度量的第  $n$  个能量积分公式, 自然也包括了面积和 Calabi 能量的表达式.

## 2 预备知识

### 2.1 HCMU 度量, 锥奇点和 cusp 奇点

设  $M$  为紧黎曼面,  $p_1, p_2, \dots, p_N$  为  $M$  上  $N$  个点. 又设  $g$  是  $M \setminus \{p_1, p_2, \dots, p_N\}$  上的光滑保角度量, 如果  $g$  满足

$$\Delta_g K + K^2 = C, \quad (2)$$

这里  $K$  为  $g$  的高斯曲率,  $C$  为实常数, 称  $g$  为  $M$  上 extremal Hermitian 度量. (2) 等价于在局部复坐标系下有

$$\frac{\partial K_{,zz}}{\partial \bar{z}} = 0, \quad (3)$$

见文献[3]. 如果  $g$  满足在局部复坐标系下

$$K_{,zz} = 0, \quad (4)$$

称  $g$  为 HCMU 度量. 明显 HCMU 度量一定是

extremal Hermitian 度量, 并且 HCMU 度量就是 extremal Kähler 度量在  $M \setminus \{p_1, p_2, \cdots, p_N\}$  上的直接推广. 在下文中, 我们一直假设 extremal Hermitian 度量和 HCMU 度量有有限的面积和有限的 Calabi 能量, 即

$$\int_{M \setminus \{p_1, p_2, \cdots, p_N\}} dg < +\infty, \\ \int_{M \setminus \{p_1, p_2, \cdots, p_N\}} K^2 dg < +\infty. \tag{5}$$

下面介绍锥奇点和 cusp 奇点:

**定义 2.1** 设  $X$  为黎曼面,  $p \in X$ . 又设  $(U, z)$  为  $p$  附近的局部复坐标系且  $z(p) = 0$ ,  $g$  为  $U \setminus \{p\}$  上光滑度量. 如果  $g = e^{2\varphi} |dz|^2$ , 并且  $\varphi - (\alpha - 1) \ln |z|$  ( $\alpha > 0$ ) 在  $p$  处连续, 称  $p$  为  $g$  的锥奇点并且  $g$  在  $p$  处有锥角度  $2\pi\alpha$ .

**定义 2.2** 设  $X$  为黎曼面,  $p \in X$ . 又设  $(U, z)$  为  $p$  附近的局部复坐标系且  $z(p) = 0$ ,  $g$  为  $U \setminus \{p\}$  上的光滑度量. 如果  $g = e^{2\varphi} |dz|^2$ , 并且  $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\varphi + \ln |z|}{\ln |z|} = 0$ , 称  $p$  为  $g$  的 cusp 奇点.

事实上, 如果 HCMU 度量满足 (5), 则它的奇点或者是锥奇点或者是 cusp 奇点, 见文献[6-8].

2.2 带锥奇点的 non-CSC HCMU 度量的基本性质, football 分解与粘合

仍然假设  $M$  为紧黎曼面,  $p_1, p_2, \cdots, p_N$  为  $M$  上  $N$  个点,  $g$  为  $M \setminus \{p_1, p_2, \cdots, p_N\}$  上光滑保角度量. 设  $(U, z)$  为  $M \setminus \{p_1, p_2, \cdots, p_N\}$  上的局部复坐标系, 则  $g$  在  $U$  上可写成

$$g = e^{2\varphi} |dz|^2,$$

于是高斯曲率  $K = -e^{-2\varphi} \Delta \varphi$ , 这里  $\Delta = 4 \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}}$ . 如果  $g$  为  $M \setminus \{p_1, p_2, \cdots, p_N\}$  上的 HCMU 度量, 即式 (4) 成立, 这等价于

$$\nabla K = \sqrt{-1} e^{-2\varphi} K_{\bar{z}} \frac{\partial}{\partial \bar{z}}$$

为  $M \setminus \{p_1, p_2, \cdots, p_N\}$  上的全纯向量场, 这也等价于

$$V = \frac{1}{2} \left( \sqrt{-1} e^{-2\varphi} K_{\bar{z}} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} - \sqrt{-1} e^{-2\varphi} K_z \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

为  $M \setminus \{p_1, p_2, \cdots, p_N\}$  上的 Killing 向量场. 进一步, 如果  $g$  是 non-CSC HCMU 度量,  $\nabla K$  和  $V$  都是非平凡的.

现在假设  $g$  为 non-CSC HCMU 度量,  $p_1, p_2,$

$\cdots, p_N$  为  $g$  的锥奇点, 并且  $g$  在  $p_1, p_2, \cdots, p_N$  处分别有锥角度  $2\pi\alpha_1, 2\pi\alpha_2, \cdots, 2\pi\alpha_N$ , 这里  $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_N$  都为正实数并且都不为 1, 因为文献[9]证明了如果 HCMU 度量在某点处的锥角度为  $2\pi$ , 则度量在该点处光滑, 即该点实际上不是度量的奇点. Chen<sup>[3]</sup> 通过研究  $V$  以及  $V$  的积分曲线得到如下重要结论:

**命题 2.1** (文献[3]) 高斯曲率  $K$  可以连续地延拓到整个  $M$  上.

**命题 2.2** (文献[3])  $V$  的奇点数有限, 并且  $V$  的奇点集一定是  $K$  的鞍点集和  $K$  的局部极值点集的并集, 这里  $K$  的鞍点是指存在两条以上  $V$  的积分曲线在该点相交.

**命题 2.3** (文献[3])  $K$  的鞍点必为  $g$  的锥奇点, 并且  $K$  的鞍点锥角度为  $2\pi\alpha$  形式, 这里  $\alpha$  为整数, 进一步  $V$  在  $K$  的鞍点处的旋转指标为  $\alpha - 1$ .

**命题 2.4** (文献[3])  $g$  的锥奇点除了  $K$  的鞍点外, 都是  $K$  的局部极值点.  $K$  的光滑临界点都是局部极值点, 即  $K$  的局部极值点分成 2 类: 一类是  $g$  的除鞍点外的锥奇点, 另一类是  $K$  的全部光滑临界点.  $V$  在  $K$  的任何一个局部极值点处的旋转指标都是 1.

**定理 2.1** (文献[3]) 设  $\{p_1, p_2, \cdots, p_l\} \subset \{p_1, p_2, \cdots, p_N\}$  为  $K$  鞍点集, 则  $M$  的欧拉示性数为

$$\chi(M) = \sum_{i=1}^l (\alpha_i - 1) + (N - l) + S, \tag{6}$$

这里  $S$  表示  $K$  的光滑临界点个数.

注: 定理 2.1 是将 Poincaré - Hopf 定理应用到  $V$  上并且结合命题 2.2, 2.3 和 2.4 得到的.

由定理 2.1, 可以得到如果  $K$  没有鞍点,  $\chi(M) = N + S > 0$ , 因此,  $M$  为球面, 并且  $N + S = 2$ , 即  $K$  只有 2 个局部极值点分别在  $K$  的最大、最小值点处. 这种 HCMU 度量实际上是旋转对称的, 称为 football, 如图 1 所示.

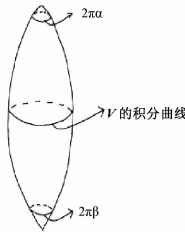


图 1 Football  
Fig. 1 Football

这里南北极分别是  $K$  的最小、最大值点, 并且度量在两点处的锥角度分别为  $2\pi\beta$ 、 $2\pi\alpha$ ,  $\alpha > \beta$ , 纬线为  $V$  的积分曲线. 具体地,  $g = du^2 + f(u)^2 d\theta^2$  ( $0 \leq u \leq l, 0 \leq \theta \leq 2\pi$ ), 这里  $f(u)$  满足基本性质:  $f(0) = f(l) = 0$ ;  $f'(0) = \alpha, f'(l) = -\beta$ ;  $f(u) > 0, u \in (0, l)$ . 由于  $g$  为 HCMU 度量,  $f$  还要满足其他性质, 关于 football 的详细描述见文献[4]. 为了方便, 记这样的 football 为  $S^2_{|\alpha, \beta|}$ . 此外, 文献[3]还给出了利用 football 构造复杂一些 non-CSC HCMU 度量的方法, 例如: 取 2 个相同的 football,  $S^2_{|\frac{1}{2}, \frac{1}{3}|}$ , 见图 2. 分别从  $K$  的最小值点沿经线剪开相同的距离, 然后将经线  $P$  和  $P', Q$  和  $Q'$  粘在一起, 于是得到一个新 non-CSC HCMU 度量, 这个 HCMU 度量有锥角度  $2\pi\frac{1}{2}, 2\pi\frac{1}{2}, 4\pi, 2\pi\frac{2}{3}$ ,  $A(A')$  是  $K$  的鞍点, 锥角度为  $4\pi$ .

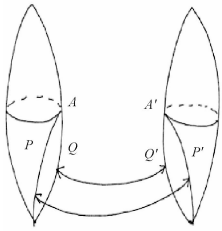


图 2 2 个 football 粘合  
Fig. 2 Gluing of two footballs

文献[4]继续文献[3]中的研究, 得到了下面一些结果.

**命题 2.5** (文献[4]) 带锥奇点的 non-CSC HCMU 度量, 任何  $K$  的局部极值点都是  $K$  的最大或最小值点. 如果记  $K_1$ 、 $K_2$  为  $K$  的最大最小值, 则  $K_1 > 0, K_1 > K_2 > -(K_1 + K_2)$ .

**定理 2.2** (文献[4]) 带锥奇点的 non-CSC HCMU 度量都可以沿着有限条从  $K$  的最大值点到  $K$  的最小值点的测地线 (这些测地线与  $V$  垂直) 将底流形剖分成有限多片, 而每一片都与某个 football 等距.

**定理 2.3** (文献[4]) 两个 football  $S^2_{|\alpha_1, \beta_1|}$  与  $S^2_{|\alpha_2, \beta_2|}$  能沿着经线或经线的一段粘起来的充要条件是:

$$\frac{\alpha_1}{\beta_1} = \frac{\alpha_2}{\beta_2}, \frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{A_1}{A_2},$$

这里  $A_1$ 、 $A_2$  分别表示  $S^2_{|\alpha_1, \beta_1|}$  和  $S^2_{|\alpha_2, \beta_2|}$  的面积.

## 2.3 特征 1-形式与 non-CSC HCMU 度量

### 2.3.1 带锥奇点的 non-CSC HCMU 度量

文献[5]用复分析的方法研究了带锥奇点的 non-CSC HCMU 度量. 具体地, 其定义了  $\nabla K$  的对偶 1-形式, 称为特征 1-形式. 证明了特征 1-形式为亚纯 1-形式, 研究了特征 1-形式在奇点处的阶以及留数性质, 并且利用特征 1-形式构造出了 non-CSC HCMU 度量.

仍沿用之前的记号, 令  $M$  是紧黎曼面,  $p_1, p_2, \dots, p_N$  为  $M$  上  $N$  个点,  $g$  为  $M$  上的 non-CSC HCMU 度量, 在  $p_1, p_2, \dots, p_N$  处有锥奇点并且有锥角度  $2\pi\alpha_1, 2\pi\alpha_2, \dots, 2\pi\alpha_N$ . 又设  $\{p_1, p_2, \dots, p_l\} \subset \{p_1, p_2, \dots, p_N\}$  为  $K$  的鞍点,  $\{p_{l+1}, p_{l+2}, \dots, p_J\} \subset \{p_1, p_2, \dots, p_N\}$  为  $K$  的最大值点,  $\{p_{J+1}, p_{J+2}, \dots, p_N\} \subset \{p_1, p_2, \dots, p_N\}$  为  $K$  的最小值点. 再设  $\{q_1, q_2, \dots, q_s\} \subset M \setminus \{p_1, p_2, \dots, p_N\}$  为  $K$  的光滑极值点, 其中  $q_1, q_2, \dots, q_T$  为  $K$  的最大值点,  $q_{T+1}, q_{T+2}, \dots, q_s$  为  $K$  的最小值点. 则  $\nabla K$  在  $M \setminus \{p_1, p_2, \dots, p_N, q_1, q_2, \dots, q_s\}$  上处处非零, 于是定义  $\omega$  为  $\nabla K$  的对偶 1-形式, 具体地, 令  $\omega$  为  $M \setminus \{p_1, p_2, \dots, p_N, q_1, q_2, \dots, q_s\}$  上的全纯 1-形式且  $\omega(\nabla K) = \frac{\sqrt{-1}}{4}$  (这里  $\frac{\sqrt{-1}}{4}$  是技术性常数), 称  $\omega$  为  $g$  的特征 1-形式. 于是有下列结果:

**定理 2.4** (文献[5])  $\omega$  为  $M$  上亚纯 1-形式.  $p_1, p_2, \dots, p_l$  为  $\omega$  的零点并且  $\omega$  在  $p_i, i = 1, 2, \dots, l$  处的阶为  $\alpha_i - 1$ .  $p_{l+1}, p_{l+2}, \dots, p_N, q_1, q_2, \dots, q_s$  都是  $\omega$  的单极点.

**定理 2.5** (文献[5]) 1) 在  $M \setminus \{p_1, p_2, \dots, p_N, q_1, q_2, \dots, q_s\}$  上有,

$$\partial K = \left(-\frac{K^3}{3} + CK + C'\right)\omega, \quad (7)$$

这里  $C$  是 (2) 式中常数,  $C'$  是实常数.

2) 在  $M \setminus \{p_1, p_2, \dots, p_N, q_1, q_2, \dots, q_s\}$  上有

$$g = 4\left(-\frac{K^3}{3} + CK + C'\right)\omega \bar{\omega}. \quad (8)$$

$$3) -\frac{K^3}{3} + CK + C' = -\frac{1}{3}(K - K_1)(K - K_2)(K + K_1 + K_2), \quad (9)$$

这里  $K_1$ 、 $K_2$  分别为  $K$  的最大最小值.

**定理 2.6** (文献[5]) 令  $\tilde{\alpha}_{\max} = \alpha_{l+1} + \alpha_{l+2} + \dots + \alpha_J + T$ ,  $\tilde{\alpha}_{\min} = \alpha_{J+1} + \alpha_{J+2} + \dots + \alpha_N + S - T$ ,

$\lambda = -\frac{\bar{\alpha}_{\max}}{\bar{\alpha}_{\min}}, \sigma = -\frac{3}{(K_1 - K_2)(K_2 + 2K_1)}$ . 则  $\lambda < -1, K_2 = -\frac{\lambda + 2}{2\lambda + 1}K_1$ . 并且在  $p_j, j = I + 1, I + 2, \dots, J$  处,  $\omega$  的留数为  $\sigma\alpha_j$ ; 在  $p_k, k = J + 1, J + 2, \dots, N$  处,  $\omega$  的留数为  $\lambda\sigma\alpha_k$ ; 在  $q_t, t = 1, 2, \dots, T$  处,  $\omega$  的留数为  $\sigma$ ; 在  $q_\tau, \tau = T + 1, T + 2, \dots, S$  处,  $\omega$  的留数为  $\lambda\sigma$ .

注: 由于文献[9]证明了如果 HCMU 度量在某点处的锥角度为  $2\pi$ , 则度量在该点处光滑. 因此, 可以把  $K$  的光滑极值点看成锥角度为  $2\pi$  的锥奇点. 在这种观点下,  $\alpha_{\max} \triangleq 2\pi\bar{\alpha}_{\max}, \alpha_{\min} \triangleq 2\pi\bar{\alpha}_{\min}$  分别可以看成  $K$  的最大值点和最小值点的角度之和. 同样在这种观点下, 如果  $p$  为  $K$  的最大值点,  $\omega$  在  $p$  处的留数可以写成  $\sigma\alpha$ , 这里  $2\pi\alpha$  为  $g$  在  $p$  处的锥角度, 类似地, 如果  $p$  为  $K$  的最小值点,  $\omega$  在  $p$  处的留数为  $\lambda\sigma\alpha$ , 这里  $2\pi\alpha$  为  $g$  在  $p$  处的锥角度.

### 2.3.2 既带锥奇点又带 cusp 奇点的 non-CSC HCMU 度量

文献[6]将文献[5]的结果推广到了既带锥奇点又带 cusp 奇点的 non-CSC HCMU 度量上. 具体地, 令  $M$  为紧黎曼面,  $p_1, p_2, \dots, p_N$  为  $M$  上  $N$  个点, 设  $g$  为  $M$  上 non-CSC HCMU 度量,  $p_1, p_2, \dots, p_L (0 < L \leq N)$  为  $g$  的 cusp 奇点,  $p_{L+1}, p_{L+2}, \dots, p_N$  为  $g$  的锥奇点并且分别有锥角度  $2\pi\alpha_{L+1}, 2\pi\alpha_{L+2}, \dots, 2\pi\alpha_N$ . 则有下列结论:

**命题 2.6** (文献[6]) 高斯曲率  $K$  为  $M$  上的连续函数.

**命题 2.7** (文献[6]) 存在实常数  $C'$  使得在  $M \setminus \{p_1, p_2, \dots, p_N\}$  上,

$$-4\sqrt{-1}\nabla K(K) = -\frac{K^3}{3} + CK + C'.$$

**命题 2.8** (文献[6])  $K$  的光滑极值点数有限. 由命题 2.8, 设  $q_1, q_2, \dots, q_S$  为  $K$  的所有光滑极值点. 于是  $\nabla K$  为  $M \setminus \{p_1, p_2, \dots, p_N, q_1, q_2, \dots, q_S\}$  上处处非零的全纯向量场. 因此, 可以像在 2.3.1 中那样定义  $\nabla K$  的对偶 1-形式  $\omega$ ,  $\omega(\nabla K) = \frac{\sqrt{-1}}{4}$ , 称为  $g$  的特征 1-形式. 于是有:

**定理 2.7** (文献[6])  $\omega$  为  $M$  上亚纯 1-形式,

在  $M \setminus \{p_1, p_2, \dots, p_N, q_1, q_2, \dots, q_S\}$  上有:

$$1) \partial K = \left(-\frac{K^3}{3} + CK + C'\right)\omega,$$

$$2) g = 4\left(-\frac{K^3}{3} + CK + C'\right)\omega\bar{\omega}.$$

**定理 2.8** (文献[6]) 存在  $\mu < 0$ , 使得  $\lim_{p \rightarrow p_l} K(p) = \mu, l = 1, 2, \dots, L$ , 并且

$$-\frac{K^3}{3} + CK + C' = -\frac{1}{3}(K - \mu)^2(K + 2\mu).$$

进一步, 在  $M \setminus \{p_1, p_2, \dots, p_N, q_1, q_2, \dots, q_S\}$  上,  $\mu < K < -2\mu$ .

**定理 2.9** (文献[6])  $g$  的 cusp 奇点都是  $\omega$  的单极点, 并且  $\omega$  在该极点处有正留数. 在  $K$  的光滑极值点  $q_1, q_2, \dots, q_S$  处,  $K$  的取值都是  $-2\mu$ , 并且  $\omega$  在每个  $K$  的光滑极值点处的留数都是  $-\frac{1}{3\mu^2}$ .

**定理 2.10** (文献[6]) 每个  $g$  的锥奇点或者是  $\omega$  的零点或者是  $\omega$  的单极点, 不妨设  $p_{L+1}, p_{L+2}, \dots, p_{L+I}$  为  $\omega$  的零点,  $p_{L+I+1}, p_{L+I+2}, \dots, p_N$  为  $\omega$  的单极点. 则  $\alpha_i, i = L + 1, L + 2, \dots, L + I$ , 为整数,  $\omega$  在  $p_i$  处的阶为  $\alpha_i - 1, K$  可以光滑延拓到  $p_i$  处,  $\mu < \lim_{p \rightarrow p_i} K(p) < -2\mu$  并且  $dK(p_i) = 0$ , 即  $p_i$  为  $K$  的鞍点. 在  $p_k, k = L + I + 1, L + I + 2, \dots, N$  处,  $\omega$  的留数为  $-\frac{\alpha_k}{3\mu^2}$  并且  $\lim_{p \rightarrow p_k} K(p) = -2\mu$ .

## 3 定理 1.1 的证明

在定理 1.1 的证明中, 必要性的证明比较容易, 充分性的证明主要是将文献[3]中构造 non-CSC HCMU 度量的方法推广.

**定理 1.1 的证明** (必要性) 设  $S^2$  上存在以  $p_1, p_2, p_3$  为锥奇点的 non-CSC HCMU 度量  $g$ , 并且  $g$  在  $p_1, p_2, p_3$  处的锥角度分别为  $2\pi\alpha_1, 2\pi\alpha_2, 2\pi\alpha_3$ . 如果  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  中没有整数, 由命题 2.3,  $K$  没有鞍点, 又由定理 2.1,  $g$  为 football. 再由定理 2.1, 公式(6)成立, 而公式(6)左边为 2, 右边为  $3 + S \geq 3$ , 矛盾. 因此,  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  中必有整数.

(充分性) 如果  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  中有整数, 不妨设  $\alpha_1$  为整数. 则  $\alpha_1 - 1 \geq 1$ , 并且  $\alpha_1 - 1 + \alpha_2 > \alpha_3$  或者  $\alpha_1 - 1 + \alpha_3 > \alpha_2$ , 不妨假设前者成立. 令  $\rho = \frac{\alpha_3}{\alpha_1 - 1 + \alpha_2}$ , 则  $\rho < 1$ . 取  $\alpha_1$  个 football:

$S^2_{[\alpha_2, \rho\alpha_2]}$ ,  $\frac{S^2_{[1, \rho]}, \dots, S^2_{[1, \rho]}}{\alpha_1 - 1}$ , 并且满足定理 2.3 条件, 即

$$\frac{S^2_{[\alpha_2, \rho\alpha_2]} \text{ 的面积}}{S^2_{[1, \rho]} \text{ 的面积}} = \alpha_2,$$

于是由定理 2.3,  $S^2_{[\alpha_2, \rho\alpha_2]}$  和  $S^2_{[1, \rho]}$  能沿经线或经线的一段光滑粘起来. 取  $S^2_{[\alpha_2, \rho\alpha_2]}$  和一个  $S^2_{[1, \rho]}$ , 如同上文中文献 [3] 中构造的那样, 先将  $S^2_{[\alpha_2, \rho\alpha_2]}$  和  $S^2_{[1, \rho]}$  从  $K$  的最小值点沿着经线剪开相同的长度, 再将  $S^2_{[\alpha_2, \rho\alpha_2]}$  剪开后的经线与  $S^2_{[1, \rho]}$  剪开后的经线相应地粘在一起, 于是得到一个新的 non-CSC HCMU 度量有锥角度  $2\pi\alpha_2, 4\pi, 2\pi(\rho\alpha_2 + \rho)$ . 再取一个  $S^2_{[1, \rho]}$ , 也从  $K$  的最小值点沿着经线剪开与前面相同的长度, 将上一步中, 粘在一起的两条经线中的一段再剪开, 与新的  $S^2_{[1, \rho]}$  中被剪开的经线再相应地粘在一起, 于是又得到一个新的 non-CSC HCMU 度量, 有锥角度  $2\pi\alpha_2, 6\pi, 2\pi(\rho\alpha_2 + 2\rho)$ . 然后重复上述步骤, 直到把所有  $S^2_{[1, \rho]}$  用完, 最终得到一个 non-CSC HCMU 度量, 有锥角度  $2\pi\alpha_2, 2\pi\alpha_1, 2\pi[\rho\alpha_2 + (\alpha_1 - 1)\rho]$ , 而由  $\rho$  的定义,  $\rho\alpha_2 + (\alpha_1 - 1)\rho = \alpha_3$ . 因此, 最终得到一个 non-CSC HCMU 度量, 有预先指定的锥角度, 并且底流形是球面. 将这个 non-CSC HCMU 度量记为  $\tilde{g}$ , 底流形记为  $\tilde{M}$ , 则存在  $f: S^2 \rightarrow \tilde{M}$  为双全纯映射. 于是拉回度量  $f^*\tilde{g}$  为  $S^2$  上的 non-CSC HCMU 度量, 设  $f^*\tilde{g}$  的奇点为  $q_1, q_2, q_3$ , 则存在 Möbius 变换  $\sigma: S^2 \rightarrow S^2$  使得  $\sigma(p_1) = q_1, \sigma(p_2) = q_2, \sigma(p_3) = q_3$ . 于是  $\sigma^*f^*\tilde{g}$  为  $S^2$  上的 non-CSC HCMU 度量并且以  $p_1, p_2, p_3$  为锥奇点. 由于  $\sigma$  和  $f$  都是双全纯变换,  $p_1, p_2, p_3$  处的锥角度分别为  $2\pi\alpha_1, 2\pi\alpha_2, 2\pi\alpha_3$ . 证毕.  $\square$

## 4 定理 1.2 的证明

由于带锥奇点的 non-CSC HCMU 度量与既带锥奇点又带 cusp 奇点的 non-CSC HCMU 度量很相似, 这里只计算带锥奇点的 non-CSC HCMU 度量的第  $n$  个能量积分.

**定理 1.2 的证明** 首先不妨设  $\{p_1, p_2, \dots, p_l\} \subset \{p_1, p_2, \dots, p_N\}$  为  $K$  的鞍点集. 由定理 2.5, 在  $M'$  上,

$$g = -\frac{4}{3}(K - K_1)(K - K_2)(K + K_1 + K_2)\omega \bar{\omega}$$

以及

$$dK = -\frac{1}{3}(K - K_1)(K - K_2)(K + K_1 + K_2)(\omega + \bar{\omega}).$$

因此, 在  $M'$  上

$$\begin{aligned} K^n dg &= \frac{\sqrt{-1}}{2} K^n \left[ -\frac{4}{3}(K - K_1)(K - K_2)(K + K_1 + K_2) \right] \omega \wedge \bar{\omega} \\ &= \frac{\sqrt{-1}}{2} 4 K^n dK \wedge \bar{\omega} = \frac{\sqrt{-1}}{2} \frac{4}{n+1} d(K^{n+1} \bar{\omega}). \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned} C_n(g) &= \int_{M'} K^n dg = \frac{2\sqrt{-1}}{n+1} \int_{M'} d(K^{n+1} \bar{\omega}) \\ &= \frac{2\sqrt{-1}}{n+1} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{M \setminus (\cup_{k=1}^N D_\epsilon(p_k) \cup \cup_{j=1}^S D_\epsilon(q_j))} d(K^{n+1} \bar{\omega}), \end{aligned}$$

这里  $D_\epsilon(p_k)(D_\epsilon(q_j))$  表示以  $p_k(q_j)$  为圆心半径为  $\epsilon$  的坐标圆盘. 由 Stokes 公式,

$$\begin{aligned} &\int_{M \setminus (\cup_{k=1}^N D_\epsilon(p_k) \cup \cup_{j=1}^S D_\epsilon(q_j))} d(K^{n+1} \bar{\omega}) \\ &= -\sum_{k=1}^N \int_{\partial D_\epsilon(p_k)} K^{n+1} \bar{\omega} - \sum_{j=1}^S \int_{\partial D_\epsilon(q_j)} K^{n+1} \bar{\omega}. \end{aligned}$$

由于  $p_1, p_2, \dots, p_l$  为  $\omega$  的零点,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\partial D_\epsilon(p_i)} K^{n+1} \bar{\omega} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, l,$$

而

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\partial D_\epsilon(p_l)} K^{n+1} \bar{\omega} = (-2\pi \sqrt{-1})$$

$\text{Re } s_{p_l}(\omega)(K(p_l))^{n+1}, l = l+1, l+2, \dots, N$ , 类似地,

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\partial D_\epsilon(q_j)} K^{n+1} \bar{\omega} &= (-2\pi \sqrt{-1}) \text{Res}_{q_j}(\omega) \\ &(K(q_j))^{n+1}, j = 1, 2, \dots, S. \end{aligned}$$

由定理 2.6, 如果  $p_l, l = l+1, l+2, \dots, N$ , 为  $K$  的最大值点, 则

$$\begin{aligned} K(p_l) &= K_l, \text{Res}_{p_l}(\omega) = \\ &= \frac{3\alpha_l}{(K_1 - K_2)(K_2 + 2K_1)}; \end{aligned}$$

如果  $p_l$  为  $K$  的最小值点, 则

$$\begin{aligned} K(p_l) &= K_2, \text{Re } s_{p_l}(\omega) = \\ &= \frac{\tilde{\alpha}_{\max}}{\tilde{\alpha}_{\min}} \frac{3\alpha_l}{(K_1 - K_2)(K_2 + 2K_1)}; \end{aligned}$$

如果  $q_j, j = 1, 2, \dots, S$ , 为  $K$  的最大值点, 则

$$K(q_j) = K_1, \text{Res}_{q_j}(\omega) = -\frac{3}{(K_1 - K_2)(K_2 + 2K_1)};$$

如果  $q_j$  为  $K$  的最小值点, 则

$$K(q_j) = K_2, \text{Res}_{q_j}(\omega) = \frac{\tilde{\alpha}_{\max}}{\tilde{\alpha}_{\min}} \frac{3}{(K_1 - K_2)(K_2 + 2K_1)}.$$

因此,

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} & \left( - \sum_{k=1}^N \int_{\partial D_{\epsilon}(p_k)} K^{n+1} \bar{\omega} - \sum_{j=1}^S \int_{\partial D_{\epsilon}(p_j)} K^{n+1} \bar{\omega} \right) \\ &= \frac{2\pi \sqrt{-1}(-3) K_1^{n+1} \tilde{\alpha}_{\max}}{(K_1 - K_2)(K_2 + 2K_1)} + \\ & \quad \frac{2\pi \sqrt{-1} 3K_2^{n+1}}{(K_1 - K_2)(K_2 + 2K_1)} \frac{\tilde{\alpha}_{\max}}{\tilde{\alpha}_{\min}} \tilde{\alpha}_{\min} \\ &= \frac{3 \sqrt{-1} (K_2^{n+1} - K_1^{n+1}) \alpha_{\max}}{(K_1 - K_2)(K_2 + 2K_1)}, \end{aligned}$$

这里  $\alpha_{\max} = 2\pi \tilde{\alpha}_{\max}$ . 因此,

$$C_n(g) = \frac{6 \alpha_{\max} (K_1^{n+1} - K_2^{n+1})}{(n+1)(K_1 - K_2)(K_2 + 2K_1)}.$$

证毕.

□

## 参考文献

- [1] Calabi E. Extremal Kähler metrics [C] // Seminar on differential geometry. Ann of Math Stud 102, Princeton: Princeton Univ. Press, 1982: 259-290.
- [2] Chen X X. Extremal Hermitian metrics on Riemann surfaces [J]. Calc Var, 1999, 8:191-232.
- [3] Chen X X. Obstruction to the existence of metric whose curvature has umbilical Hessian in a K-surface [J]. Communications in Analysis and Geometry, 2000, 8(2): 267-299.
- [4] Chen Q, Chen X X, Wu Y Y. The structure of HCMU metric in a K-surface [J]. International Mathematics Research Notices, 2005, 16: 941-958.
- [5] Chen Q, Wu Y Y. Character 1-form and the existence of an HCMU metric [J]. Math Ann, 2011, 351(2): 327-345.
- [6] Chen Q, Wu Y Y, Xu B. On one-dimensional and singular Calabi's extremal metrics whose Gauss curvatures have nonzero umbilical Hessians [J]. Israel Journal of Mathematics, 2015, 208(1): 385-412.
- [7] Chen X X. Weak limits of Riemannian metrics in surfaces with integral curvature bound [J]. Calc Var, 1998, 6: 189-226.
- [8] Wang G F, Zhu X H. Extremal Hermitian metrics on Riemann surfaces with singularities [J]. Duke Math Journal, 2000, 104(2): 181-210.
- [9] Lin C S, Zhu X H. Explicit construction of extremal Hermitian metric with finite conical singularities on  $S^2$  [J]. Communications in Analysis and Geometry, 2002, 10(1): 177-216.