文章编号:2095-6134(2016)01-0023-08

判断有理系数多项式方程是否存在实数解的初等方法*

王 蒙†, 陈玉福

(中国科学院大学数学科学学院, 北京 100049)

(2015 年 3 月 18 日收稿; 2015 年 4 月 14 日收修改稿)

Wang M, Chen Y F. An elementary method for verifying the existence of real roots of rational polynomial equations [J]. Journal of University of Chinese Academy of Sciences, 2016,33(1):23-30.

摘 要 给出判断有理系数多元多项式方程组是否存在实数解的初等方法,从而证明多元多项式方程组的实解存在性可在有限步内自动判定. 基于此,给出判定有理系数多元多项式方程组是否存在实数解的算法.

关键词 判别式矩阵;判别式序列;数学归纳法

中图分类号:O151.1;O141.2 **文献标志码:**A **doi:**10.7523/j.issn.2095-6134.2016.01.004

An elementary method for verifying the existence of real roots of rational polynomial equations

WANG Meng, CHEN Yufu

(*School of Mathematical Sciences, University of Chinese Academy of Sciences, Beijing* 100049, *China*)

Abstract In this paper we present an elementary method to decide whether a system of multivariate polynomials with rational coefficients has a real solution. Based on our discussion of the method, an algorithm is shown, which implies that verifying a system of multivariate polynomials with rational coefficients has a real solution can be completed in finite steps.

Key words discriminant matrix; discriminant sequence; mathematical induction

判断多项式方程和多项式方程组在代数闭域上是否有解的问题已经解决[1-5],特别是在复数域上是否有解的问题已经解决. 但是判断有理系数多项式方程和有理系数多项式方程组在实数域上是否有解的问题,很长时间内都没有解决. Tarski[6]在 1948 年指出,所有初等代数的判定问题都可以解决,并建立了实闭域上的一阶命题理论. 有理系数多项式方程组是否存在实数解属于初等代数判定问题,因而,理论上可以解决. 但是他们没有给出具体的判定方法. 文献[7]给出如何判断单变元半代数问题是否存在实数解的算法,并指出该算法可以扩展为判定多元半代数问题[8-11]的实解存在性的算法. 主要思路是把 n 变元半代数问题归约为有限个 $n-1$ 元半代数问题.

* 国家自然科学基金(11271363)资助

† 通信作者,E-mail:kami518@126.com

但是,如何将 n 变元的半代数问题归约为 $n-1$ 元半代数问题,以及如何判断是否存在实数使得一组多项式都大于零这些关键问题,文献[7]都没有给出具体的步骤. 本文给出判断有理系数多元多项式组实解存在性的初等方法. 该方法基于杨路等人提出的单变元多项式的判别式理论[12],通过分类和归纳判断实数解是否存在. 在解决单变元半代数问题时,这是归纳的基础,本文的方法不需将多项式组化成互素的,因此,本文的算法与文献[7]给出算法有实质性的差别.

1 单变元多项式判别式

单变元多项式的判别式理论[5]由杨路提出,根据多项式的判别式,可以得出多项式方程的不同的实数解的个数.

定义 1.1 给定单变元多项式

$$f(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot x + a_0; a_n \neq 0, \tag{1}$$

其系数构成的 $2n$ 阶方阵

$$\mathrm{Discm}(f):=\begin{bmatrix} a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_0 & & & & & \\ 0 & n\cdot a_n & (n-1)\cdot a_{n-1} & \cdots & a_1 & & & & & \\ & a_n & (n-1)\cdot a_{n-1} & \cdots & a_1 & a_0 & & & & \\ & 0 & n\cdot a_n & \cdots & 2\cdot a_2 & a_1 & & & & \\ & & & & \vdots & \vdots & & & & \\ & & & & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_0 \\ & & & & 0 & n\cdot a_n & (n-1)\cdot a_{n-1} & \cdots & a_1 \end{bmatrix}$$

称为 $f(x)$ 的判别矩阵. 用 D_k 表示判别矩阵的 $2k$ 阶顺序主子式. 约定 $D_0=1$,称

$$\mathrm{Discl}(f) := [D_0, D_1, \cdots, D_n] \tag{2}$$

为多项式 $f(x)$ 的判别式序列.

定义 1.2 对于实数序列

$$\bar{c} := [c_0, c_1, c_2, \cdots, c_n] \tag{3}$$

称

$$\overline{\mathrm{sgn}(c)} := [\mathrm{sgn}(c_0), \mathrm{sgn}(c_1), \mathrm{sgn}(c_2), \cdots, \mathrm{sgn}(c_n)]$$

为实数序列 $\bar{c}$ 的符号表.

定义 1.3 给定一个符号表 $[s_0, s_1, s_2, \cdots s_n]$,符号表的首项 s_0 不为零. 依据以下规则构造一个新的符号表 $[\psi_0, \psi_1, \psi_2, \cdots, \psi_n]$. 构造规则如下:如果 $[s_i, s_{i+1}, \cdots, s_{i+j}]$ 是给定符号表的一部分,满足

$$s_i \neq 0; s_{i+1} = s_{i+2} = \cdots = s_{i+j-1} = 0; s_{i+j} \neq 0; \tag{4}$$

那么就将

$$[s_{i+1}, s_{i+2}, \cdots, s_{i+j-1}] \tag{5}$$

替换为

$$[-s_i, -s_i, s_i, s_i, -s_i, -s_i, s_i, s_i, -s_i, \cdots], \tag{6}$$

变换前后项数不变,而且变换后序列不再含有 0 项. 符号表 $[\psi_0, \psi_1, \psi_2, \cdots, \psi_n]$ 称为符号表 $[s_0, s_1, s_2, \cdots, s_n]$ 的符号修订表.

定理 1.1[1] 如果实系数多项式 $f(x)$ 的判别式序列的符号修订表的变号数为 v,那么 $f(x)$ 的互异共轭虚根对的数目就是 v; 如果该修订表中非零元的个数是 l,则 $f(x)$ 的互异实根数目是 $l-1-2v$.

定义 1.4 对于实系数多项式

$$f(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot x + a_0 \tag{7}$$

和另一个实系数多项式 $g(x)$,设

$$r(x) = \mathrm{rem}(f'g, f) = b_{n-1} \cdot x^{n-1} + b_{n-2} \cdot x^{n-2} + \cdots + b_1 \cdot x + b_0, \tag{8}$$

称 $2n$ 阶方阵

$$\mathrm{Discm}(f,g):=\begin{bmatrix} a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_0 & & & & \\ 0 & b_{n-1} & b_{n-2} & \cdots & b_0 & & & & \\ & a_n & a_{n-1} & \cdots & a_1 & a_0 & & & \\ & 0 & b_{n-1} & \cdots & b_2 & b_0 & & & \\ & & & & \vdots & & & & \\ & & & & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_0 \\ & & & & 0 & b_{n-1} & b_{n-2} & \cdots & b_0 \end{bmatrix}$$

为 $f(x)$ 关于 $g(x)$ 的广义判别式矩阵[2],令 $D_0=1$, $D_k(f,g)$ 为矩阵 $\mathrm{Discm}(f,g)$ 的 $2k$ 阶顺序主子式,则

$$\mathrm{Discl}(f,g) := [D_0, D_1(f,g), \cdots, D_n(f,g)] \tag{9}$$

称为 $f(x)$ 关于 $g(x)$ 的广义判别式序列.

定理 1.2　给定实系数多项式 $f(x)$，$g(x)$，如果 $\mathrm{Discl}(f,g)$ 的符号修订表的变号数是 v，而非零元素的个数是 l，则

$$l-1-2\cdot v=f_{g^+}-f_{g^-},\tag{10}$$

其中

$$f_{g^+}=|\{x\in R\mid f(x)=0,g(x)>0\}|,$$

$$f_{g^-}=|\{x\in R\mid f(x)=0,g(x)<0\}|.\tag{11}$$

定义 1.5　问题 $P(n)$：

$$\bar{g}=[g_1(x_1,x_2,\cdots,x_n),g_2(x_1,x_2,\cdots,x_n),\cdots,g_m(x_1,x_2,\cdots,x_n)],\tag{12}$$

$\forall i,g_i(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是关于未定元$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的有理系数多项式．

$$\bar{c}=[c_1,c_2,\cdots,c_m],\tag{13}$$

$\forall i,c_i$ 是一个实数．

是否存在实数$(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0)$，使得

$$\forall i,(c_i\neq 0\Rightarrow g_i(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0)\cdot c_i>0)\wedge(c_i=0\Rightarrow g_i(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0)=0).\tag{14}$$

为了表述方便，下文要用到一些记号，下面指明这些记号的含义．

符号表是一个由 0，1，－1 组成的有限长的序列．对于任何一个符号表 $\bar{c}$，如果 $\bar{c}$ 的符号修订表的非零元个数为 l，变号数为 v，那么记号 $\mathrm{number}(\bar{c})$ 定义为 $\mathrm{number}(\bar{c}):=l-2\cdot v-1$．$\mathrm{degree}(f(x_1,x_2,\cdots,x_n),x_i)$ 记为多项式 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 关于未定元 x_i 的次数．$\mathrm{coeff}(f(x_1,x_2,\cdots,x_n),x_i,k)$ 记为多项式 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 关于未定元 x_i 的 k 次系数，一般是个关于未定元 $x_1,x_2,\cdots,\widehat{x_i},\cdots,x_n$ 的多项式．$\mathrm{DiscriminantSequence}(f(x_1,x_2,\cdots,x_n),x_i)$ 记为多项式 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 关于未定元 x_i 的判别式序列．$\mathrm{DiscriminantSequence}(f(x_1,x_2,\cdots,x_n),g(x_1,x_2,\cdots,x_n),x_i)$ 记为根据定义 4 以 x_i 为主变元，求得的判别式序列．$\mathrm{trunc}(f,x_i,k)$ 记为将 f 中所有关于未定元 x_i 的次数大于 k 的项截掉之后剩下的项组成的多项式.

2　$P(1)$可以在有限步内解决

定义 2.1　$Q(n)$是这样一个问题：存在多少个不同的实数，使得

$f(x)=0,g_1(x)>0,g_2(x)>0,\cdots,g_n(x)>0$，$f(x)$ 不是零次多项式．

定理 2.1　用记号 $\mathrm{number}([f(x),g_1(x),g_2(x),\cdots,g_n(x)])$ 表示问题 $Q(n)$ 的解，也就是说存在 $\mathrm{number}([f(x),g_1(x),g_2(x),\cdots,g_n(x)])$ 个不同的实数使得

$f(x)=0,g_1(x)>0,g_2(x)>0,\cdots,g_n(x)>0$，

$\mathrm{number}([f,g_1,g_2,\cdots,g_n])$ 可以写成有限多个形如 $c\cdot\mathrm{number}(\mathrm{DiscrimiantSequence}(h(f,g_1,g_2,\cdots,g_n),x))$（$c$ 是有理数，h 是关于 $f,g_1,\cdots,g_k$ 的多项式）的项及有限多个形如

$$d\cdot\mathrm{number}(\mathrm{DiscriminantSequence}(h_1(f,g_1,g_2,\cdots,g_n),h_2(f,g_1,g_2,\cdots,g_n),x)),$$

（d 是有理数，h_1,h_2 是关于 $f,g_1,\cdots,g_n$ 的多项式）的项的和．

证明：要求解存在多少个不同的实数，使得 $f(x)=0,g_1(x)>0$．根据定理 1.1，可以求出 $f(x)=0$ 有多少个不同的实数解，计 $f(x)=0$ 一共有 a 个不同的实数解．根据定理 1.1，可以求出 $f(x)^2+g_1(x)^2=0$ 有多少个不同的实数解，设 $f(x)^2+g_1(x)^2=0$ 一共有 b 个不同的实数解．根据定理 1.2，可以求出 $f_{g_1^+}-f_{g_1^-}$ 记为 c．那么一共有$(a+c-b)/2$ 个不同的实数，使得 $f(x)=0,g_1(x)>0$．所以求解的公式为

$$\begin{aligned}&(\mathrm{number}(\mathrm{DiscriminantSequence}(f,x))-\\&\mathrm{number}(\mathrm{DiscriminantSequence}(f^2+g_1^2,x))+\\&\mathrm{number}(\mathrm{DiscriminantSequence}(f,g_1,x)))/2.\end{aligned}\tag{15}$$

假设对于 $Q(k)$，$\mathrm{number}([f,g_1,g_2,\cdots,g_k])$ 可以表示成有限多个形如

$$c\cdot\mathrm{number}(\mathrm{Discrimiant}(h(f,g_1,g_2,\cdots,g_k),x)),$$

（c 是有理数，h 是关于 $f,g_1,\cdots,g_k$ 的多项式）的项及有限多个形如

$$d\cdot\mathrm{number}(\mathrm{DiscriminantSequence}(h_1(f,g_1,g_2,\cdots,g_k),h_2(f,g_1,g_2,\cdots,g_k),x)),$$

（d 是有理数，h_1,h_2 是关于 $f,g_1,\cdots,g_k$ 的多项式）的项的和．根据假设，可以求出以下 5 个系统的不同的实数解的个数（分别用记号 a,b,c,d,e 表示），

$$\begin{cases}f(x)=0\\g_1(x)>0\\\quad\vdots\\g_k(x)>0\end{cases}\tag{16}$$

$$\begin{cases} f(x)=0 \\ g_{k+1}(x)>0 \\ g_2(x)>0 \\ \vdots \\ g_k(x)>0 \end{cases} \tag{17}$$

$$\begin{cases} f(x)^2+g_1(x)^2=0 \\ g_{k+1}(x)>0 \\ g_2(x)>0 \\ \vdots \\ g_k(x)>0 \end{cases} \tag{18}$$

$$\begin{cases} f(x)^2+g_{k+1}(x)^2=0 \\ g_1(x)>0 \\ \vdots \\ g_k(x)>0 \end{cases} \tag{19}$$

$$\begin{cases} f(x)=0 \\ -g_1(x)\cdot g_{k+1}(x)>0 \\ \vdots \\ g_k(x)>0 \end{cases} \tag{20}$$

$$\begin{cases} f(x)=0 \\ g_1(x)>0 \\ \vdots \\ g_{k+1}(x)>0 \end{cases} \tag{21}$$

那么满足(21)式的不同的实数的个数为 $(a+b-c-d-e)/2$. 根据假设 a,b,c,d,e 可以写成有限多个形如

$c\cdot$number(DiscrimiantSequence($h(f,g_1,g_2,\cdots,g_{k+1}),x$)),

(c 是有理数,h 是关于 $f,g_1,\cdots,g_k$ 的多项式)的项及有限多个形如

$d\cdot$number(DiscriminantSequence($h_1(f,g_1,g_2,\cdots,g_{k+1}),h_2(f,g_1,g_2,\cdots,g_{k+1}),x$),

(d 是有理数,h_1,h_2 是关于 $f,g_1,\cdots,g_{k+1}$ 的多项式)的项的和.

所以满足式(21)的不同的实数的个数可以表示成有限多个形如

$c\cdot$number(DiscrimiantSequence($h(f,g_1,g_2,\cdots,g_{k+1}),x$)),

(c 是有理数,h 是关于 $f,g_1,\cdots,g_k$ 的多项式)的项及有限多个形如

$d\cdot$number(DiscriminantSequence($h_1(f,g_1,g_2,\cdots,g_{k+1}),h_2(f,g_1,g_2,\cdots,g_{k+1}),x$),

(d 是有理数,h_1,h_2 是关于 $f,g_1,\cdots,g_{k+1}$ 的多项式)的项的和.

综上所述, number($[f,g_1,g_2,\cdots,g_n]$)可以写成有限多个形如

$c\cdot$number(DiscrimiantSequence($h(f,g_1,g_2,\cdots,g_n),x$)),

(c 是有理数,h 是关于 $f,g_1,\cdots,g_k$ 的多项式)的项及有限多个形如

$d\cdot$number(DiscriminantSequence($h_1(f,g_1,g_2,\cdots,g_n),h_2(f,g_1,g_2,\cdots,g_n),x$),

(d 是有理数,h_1,h_2 是关于 $f,g_1,\cdots,g_n$ 的多项式)的项的和.

定理 2.2 $P(1)$是可以通过有限步运算解决的.

证明:沿用定义问题 $P(n)$时用到的记号,如果序列 $\bar{c}$ 的任意一项都为 0. 令 $F(x)=\sum g_i(x)^2$, 那么存在实数 x^0, 使得 $\forall i, g_i(x^0)=0$, 当且仅当存在实数 x^1 使得 $F(x^1)=0$,下面证明这个结论.

如果存在实数(计为 x^0)使得 $\forall i, g_i(x^0)=0$, 那么 $\sum g_i(x^0)^2=0$,也就是说 $F(x^0)=0$;另一方面,因为 $\forall i, x\Rightarrow g_i(x)^2\geqslant 0$, 所以如果存在实数(计为 x^0)使得 $F(x^0)=0$,那么 $\forall i, g_i(x^0)=0$. 综上所述,存在实数 x^0 使得 $\forall i, g_i(x^0)=0$, 当且仅当存在实数 x^1 使得 $F(x^1)=0$.

如果 $F(x)$ 是个零次多项式,可直接判断 $F(0)$ 是否为零. 为零,有实数解;否则没有实数解. 如果 $F(x)$ 的次数大于零,如果 number(DiscriminantSequence($F(x),x$))>0,那么 $P(1)$存在实数解,否则不存在.

如果 $\bar{c}$ 中存在等于 0 的项,也存在不等于 0 的项(令 $F(x)=\sum_{c_i=0} g_i(x)^2$),而且 $F(x)$ 不是零多项式,那么,

归纳起来,如果 $F(x)$ 是一个次数大于零的多项式,那么可以根据问题 $Q(n)$的求解公式,判断是否存在实数解. 如果 $F(x)$ 的次数为零次,那么 $F(x)$ 是一个不为零的常数,此 $P(1)$问题无解.

所以 $P(1)$在条件 $\exists i\, c_i=0 \wedge \exists i\, c_i\neq 0 \wedge \sum_{c_i=0} g_i(x)^2\neq 0$ 下,可以在有限步内判断是否存在实数解.

如果 $\forall i, c_i \neq 0$,那么问题等价于求解是否存在实数 x^0 使得,

$$\forall i, c_i \cdot g_i(x^0) > 0, \tag{22}$$

设 $c_i \cdot g_i(x)$ 的无平方部分为 $h_i(x)$,则方程

$$\prod_i h_i(x) = 0$$

可能存在实数根,也可能不存在,分情况讨论.

存在实数根时,设

$$\alpha_1, \cdots, \alpha_k$$

为方程的不同的实根(按从小到大排列). 添加记号 $\alpha_0 = -\infty, \alpha_{k+1} = \infty$, 那么

$\forall i \in \mathbb{N} \wedge i \geqslant 0 \wedge i \leqslant k\ \forall j, g_j(x)$ 在区间(α_i, α_{i+1})上正负号保持不变. 所以如果存在位于 (α_i, α_{i+1}) 的实数 x^0 满足式(22)要求. 那么

$$\forall a \in (\alpha_i, \alpha_{i+1}),$$

a 满足式(22)要求.

$$\forall i, j$$

如果 $h_j(\alpha_i) > 0$,那么在 α_i 的足够小的邻域内有 $g_j(x) > 0$ 恒成立;

如果 $h_j(\alpha_i) < 0$,那么在 α_i 的足够小的邻域内有 $g_j(x) < 0$ 恒成立;

如果 $h_j(\alpha_i) = 0$ 因为 $h_j(x)$ 是无平方的,所以 $\frac{\mathrm{d}\,h_j(x)}{\mathrm{d}x} \neq 0$. 如果 $\frac{\mathrm{d}\,h_j(x)}{\mathrm{d}x} > 0$, 表示 $h(x)$ 在 α_i 的右边大于零;如果 $\frac{\mathrm{d}\,h_j(x)}{\mathrm{d}x} < 0$, 表示 $h(x)$ 在 α_i 的左边大于零.

存在满足式(22)要求的实数 x^0,那么 x^0 一定位于某个(α_i, α_{i+1})之间. 当然可能会发生这样的情况 $\alpha_i = -\infty$或者 $\alpha_{i+1} = \infty$. 但是 α_i, α_{i+1} 中至少有一个为实数,设 α_i 是实数(另一种情况,可以类似地讨论). 所有的$g_j(x)$ 要在实数 α_i 右边的足够小的邻域内都大于零,根据之前的分析,

$$h_j(\alpha_i) > 0 \text{ 或者 } h_j(\alpha_i) = 0 \wedge \frac{\mathrm{d}\,h_i(\alpha_i)}{\mathrm{d}x} > 0.$$

如果 $\prod h_i(x) = 0$ 在实数域上无解,那么存在实数满足(22)的条件,当且仅当 $\forall i, h_i(0) > 0$.

综上所述. 存在实数满足(22)要求,当且仅当

$$(\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \prod h_i(x) \neq 0) \wedge (\forall i, h_i(0) > 0), \tag{23}$$

或者 存在一个由大于等于 1 小于等于 m 的某些自然数构成的集合 A,满足下面要求:

$$\exists x \in \mathbb{R} \Rightarrow$$

$$(\forall j \in A \Rightarrow g_j(x) > 0) \wedge (\forall j \in A \Rightarrow g_j(x) = 0) \wedge$$

$$(\forall j \in A, k \in A \Rightarrow \frac{\mathrm{d}g_j(x)}{\mathrm{d}x} \cdot \frac{\mathrm{d}g_k(x)}{\mathrm{d}x} > 0), \tag{24}$$

式(24)可以根据求解问题 $Q(n)$ 的公式求解,而(23)式可以根据定理 1.1 判断 $\prod h_i(x) =$ 0 有没有解,直接代入判断 $\forall i, h_i(0) > 0$ 是否成立即可,所以在 $\forall i, c_i \neq 0$ 条件下,$P(1)$ 是可以在有限步内解决的.

最后一种情况是

$$\exists i, c_i = 0 \wedge \exists j, c_j \neq 0 \wedge \sum_{c_i = 0} g_i(x)^2 \equiv 0, \tag{25}$$

这种情况下问题可以转换为 $P(1)$ 在 $\forall i, c_i \neq 0$ 的条件下的问题,所以也是可以在有限步内解决的.

综上所述,$P(1)$ 可以在有限步内得到解决.

3　$P(n)$ 可以在有限步内解决

定理 3.1　假设 $P(k)$ 是可以在有限步内解决的,那么 $P(k+1)$ 是可以在有限步内解决的.

证明: $P(n)$ 问题的 $\bar{c}$ 可能只有等于零的项,可能只有不为零的项,可能既有等于零的项,又有不为零的项. 分类讨论.

如果

$$\forall i, c_i = 0, \tag{26}$$

令

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_{k+1}) = \sum g_i(x_1, x_2, \cdots, x_{k+1})^2,$$

那么当且仅当 $\exists (x_1^0, x_2^0, \cdots, x_{k+1}^0)$ 使得 $F(x_1^0, x_2^0, \cdots, x_{k+1}^0) = 0$ 时,原问题有解.

选择 x_1 为主变元,如果 $\exists (x_1^0, x_2^0, \cdots, x_{k+1}^0)$ 使得 $F(x_1^0, x_2^0, \cdots, x_{k+1}^0) = 0$, 那么对于关于 x_1 的多项式 $F(x_1, x_2^0, \cdots, x_{k+1}^0) = 0$ 有实数解. 要使得关于 x_1 的多项式 $F(x_1, x_2^0, \cdots, x_{k+1}^0) = 0$ 有实数解,需要满足以下情况中的一种:

如果 $F(x_1, x_2, \cdots, x_{k+1})\mid_{x_2 = x_2^0, x_3 = x_3^0, \cdots, x_{k+1} = x_{k+1}^0}$ 关于变元 x_1 的次数为 0,那么,

$$\forall i \geqslant 0 \Rightarrow$$

$$\mathrm{coeff}(F(x_1, x_2, \cdots, x_{k+1}), x_1, i)\mid_{x_2 = x_2^0, \cdots, x_{k+1} = x_{k+1}^0} = 0 \tag{27}$$

$\operatorname{coeff}(F(x_1,x_2,\cdots,x_{k+1}),x_1,i)$ 是关于未定元 x_2, x_3, $\cdot$, x_{k+1} 的多项式,根据假设,$P(k)$是可以在有限步内解决的.

计 $F(x_1,x_2,\cdots,x_{k+1})|_{x_2=x_2^0,x_3=x_3^0,\cdots,x_{k+1}=x_{k+1}^0}$ 关于 x_1 的次数为 d,那么,

$$(\forall i\in\mathbb{N}\wedge i>d\wedge i\leqslant \operatorname{degree}(F(x_1,x_2,\cdots,x_{k+1}),x_1))\Rightarrow \operatorname{coeff}(F(x_1,x_2,\cdots,x_{k+1}),x_1,i)|_{x_2=x_2^0,\cdots,x_{k+1}=x_{k+1}^0}=0)\wedge(\operatorname{coeff}(F(x_1,x_2,x_3,\cdots,x_{k+1}),x_1,d)|_{x_2=x_2^0,\cdots,x_{k+1}=x_{k+1}^0}\neq 0)\wedge(\operatorname{number}(\operatorname{DiscriminantSequence}(\operatorname{trunc}(F(x_1,x_2,\cdots,x_{k+1}),x_1,d),x_1)|_{x_2=x_2^0,\cdots,x_{k+1}=x_{k+1}^0})>0).\quad(28)$$

这样就将 $P(k+1)$归约为有限多个 $P(k)$问题. 根据假设,$P(k)$是可以在有限步内解决的. 所以 $P(k+1)$在条件(26)的情况下是可以在有限步内解决的.

如果

$$\exists i,c_i=0\wedge\exists i,c_i\neq 0\wedge(f(x):=\sum_{c_i=0}g_i(x)^2\Rightarrow f(x)\equiv 0),\quad(29)$$

那么 $P(k)$ 有解,当且仅当存在实数向量($x_1^0,x_2^0,\cdots,x_{k+1}^0$)使得

$$f(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_{k+1}^0)=0$$
$$\forall i,c_i\neq 0\Rightarrow c_i\cdot g_i(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_{k+1}^0)>0;\quad(30)$$

如果式(30)存在实数解,当且仅当满足下面情况中的一种:

($x_2^0,\cdots,x_{k+1}^0$)使得

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_{k+1})|_{x_2=x_2^0,\cdots,x_{k+1}=x_{k=1}^0}$$

是个次数为 d 的多项式,且 d 大于等于 1.

那么要使得(30)式存在实数解,要求

设

$$\operatorname{number}([f(x_1,x_2\cdots,x_n),g_{i_1}(x_1,x_2,\cdots,x_n),\cdots,g_{i_m}(x_1,x_2,\cdots,x_n)])=\sum_{i=1}^{i=l_{q1}}a_i\cdot\operatorname{number}(\operatorname{DiscriminantSequence}(h_i(x_1,x_2,\cdots,x_{k+1}),h_{1i}(x_1,x_2,\cdots,x_{k+1}),x_1))+\sum_{i=l_{q1}+1}^{i=l_{q2}+l_{q1}}b_i\cdot\operatorname{number}(\operatorname{DiscriminantSequence}(h_i(x_1,x_2,\cdots,x_{k+1}),x_1)),\quad(31)$$

c_i 中不等于 0 的项一共有 m 个,依次计为 $i_1,i_2,\cdots,i_m$. 多项式 $h_i(x_1,x_2,\cdots,x_{k+1})$, $h_{1i}(x_1,x_2,\cdots,x_{k+1})$ 是根据 $f(x_1,x_2,\cdots,x_{k+1})$ 和 $g_i(x_1,x_2,\cdots,x_{k+1})$ 计算出来的多项式. 而且只要 $f(x_1,x_2,\cdots,x_{k+1})$ 关于 x_1 的次数大于等于 1,那么所有 $h_i(x_1,x_2,\cdots,x_{k+1})$ 关于 x_1 的次数都大于等于 1.

为了求解出 DiscriminantSequence( ),需要对

$$h_i(x_1,x_2,\cdots,x_{k+1})$$

的次数分类讨论.

(30)式存在实数解,当且仅当

$\forall i,1\leqslant i\leqslant l_{q_1}+l_{q_2}$

$\exists\, l_i,(l_i\in\mathbb{N})\wedge(l_i\geqslant 1)$,长度为$l_i+1$ 的实数序列$\overline{c^i}$ 满足.

存在$(x_2^0,x_3^0,\cdots,x_{k+1}^0)\in\mathbb{R}^k$ 使得

$$(\forall j,j>l_i,\Rightarrow \operatorname{coeff}(h_i(x_1,x_2,\cdots,x_{k+1}),x_1,j)|_{x_2=x_2^0,\cdots,x_{k+1}=x_{k+1}^0}=0)\wedge(\operatorname{coeff}(h_i(x_1,x_2,\cdots,x_{k+1}),x_1,l_i)|_{x_2=x_2^0,\cdots,x_{k+1}=x_{k+1}^0}\neq 0)\wedge(\sum_{i=1}^{i=l_{q_1}}a_i\cdot\operatorname{number}(\overline{c^i})+\sum_{i=l_{q_1}+1}^{i=l_{q_1}+l_{q_2}}\operatorname{number}(\overline{c^i})>0)\wedge$$

$\operatorname{DiscriminantSequence}(\operatorname{trunc}(h_i(x_1,x_2,\cdots,x_{k+1}),x_1,l_i),x_1)|_{x_2=x_2^0,x_3=x_3^0,\cdots,x_{k+1}=x_{k+1}^0}$ 的符号表为$\overline{c^i}$. (32)

求解是否存在($x_2^0,x_3^0,\cdots,x_{k+1}^0$)使得(32)成立的问题,是个 $P(k)$ 问题. $P(k+1)$ 可以规约为至多有限个 $P(k)$问题,根据假设,$P(k)$是可以在有限步内解决的,所以 $P(k+1)$是可以在有限步内解决的.

另一种可能是$f(x_1,x_2,\cdots,x_{k+1})|_{x_2=x_2^0,\cdots,x_{k+1}=x_{k+1}^0}$ 为一个关于 x_1 的零次多项式,即要求

$$\sum\operatorname{coeff}(f(x_1,x_2,\cdots,x_{k+1}),x_1,i)^2|_{x_2=x_2^0,\cdots,x_{k+1}=x_{k+1}^0}=0.$$

令 $$f^1(x_2,\cdots,x_{k+1}):=\sum\operatorname{coeff}(f(x_1,x_2,\cdots,x_{k+1}),x_1,i)^2,$$

由于$f(x_1,x_2,\cdots,x_{k+1})\not\equiv 0$, 所以 $f^1(x_2,\cdots,x_{k+1})\not\equiv 0$. 如果$f^1(x_2,\cdots,x_{k+1})$ 为常数,那么一定是一个非零的常数.

判断 $P(k+1)$在约束(30)的情况下是否存在实数解的问题,转化为判断

$$f^1(x_2,\cdots,x_{k+1})=0;\forall i,c_i\neq 0\Rightarrow c_i\cdot g_i(x_1,x_2,\cdots,x_{k+1})>0\quad(33)$$

是否有解.

假设原问题在式(30)条件下不能在有限步内判断,那么 $f(x_1,x_2,\cdots,x_{k+1})\mid_{x_2=x_2^0,\cdots,x_{k+1}=x_{k+1}^0}$ 关于 x_1 是零次的.经过转化之后的 $f^1(x_2,\cdots,x_{k+1})\mid_{x_3^0,\cdots,x_{k+1}=x_{k+1}^0}$ 关于 x_2 的次数也为零(否则根据第 1 种情况下的讨论,可以在有限步内判断是否存在实数解),经过 $k+1$ 次转换之后原问题转换成问题

$$f^{k+1}=0;$$
$$\forall i,c_i\neq 0\Rightarrow c_i\cdot g_i(x_1,x_2,\cdots,x_{k+1})>0;$$
f^{k+1} 是不为零的常数

到了这一步可以判断无解.

所以与问题不能在有限步内解决矛盾.

综上所述,$P(k+1)$ 在式(30)条件下可以归约为有限多个 $P(k)$ 问题,所以可以在有限步内解决.

$$\forall i,c_i\neq 0,\tag{34}$$

在之前讨论 $P(1)$ 可在有限步内解决的解法中说到了这种情况,不过在一元多项式的情况下,我采取了简化的解法,这里给出一种复杂却普遍有效的方法:

在实数域上存在实数 x_0 使得

$$\forall i,c_i\cdot g_i(x_0)>0;\tag{35}$$

当且仅当存在实数满足:

$$\begin{gathered}(\forall i,(\exists l_i\text{s.t.}(\forall l,l<l_i\Rightarrow(\frac{\mathrm{d}^l\,c_i\cdot g_i(x)}{\mathrm{d}\,x^l}=0))\wedge\\(\frac{\mathrm{d}^{l_i}\,c_i\cdot g_i(x)}{\mathrm{d}\,x^{l_i}}\neq 0))\wedge(l_i\equiv 0(\mathrm{mod}2)\Rightarrow\\\frac{\mathrm{d}^{l_i}\,c_i\cdot g_i(x)}{\mathrm{d}\,x^{l_i}}>0)))\wedge\\(\forall i,j(l_i\equiv 1(\mathrm{mod}2)\wedge l_j\equiv 1(\mathrm{mod}2))\Rightarrow\\(\frac{\mathrm{d}^{l_i}\,c_i\cdot g_i(x)}{\mathrm{d}\,x^{l_i}}\cdot\frac{\mathrm{d}^{l_j}\,c_j\cdot g_j(x)}{\mathrm{d}\,x^{l_j}}>0)).\end{gathered}\tag{36}$$

对于多元多项式的情况,首先要选定主元,然后要讨论多项式对于主元可能的次数.如果 $(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_{k+1}^0)$ 是原问题的一个解,$(x_1,x_2^0,\cdots,x_{k+1}^0)$ 使得 $c_i\cdot g_i(x_1,x_2,\cdots,x_{k+1})$ 关于 x_1 的次数为 l_i,那么

$$(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_{k+1}^0)$$

满足:

$$\begin{gathered}f(x_1,x_2,\cdots,x_{k+1}):=\\\sum_i\sum_{k>l_i}\mathrm{coeff}(g_i(x_1,x_2,\cdots,x_{k+1}),x_1,k)^2,\\\mathrm{coeff}(g_i(x_1,x_2,\cdots,x_{k+1}),x_1,l_i)\neq 0,\\\mathrm{trunc}(c_i\cdot g_i(x_1,x_2,\cdots,x_{k+1}),x_1,l_i)>0,\end{gathered}\tag{37}$$

如果 $f(x_1,x_2,\cdots,x_{k+1})\not\equiv 0$,那么这就是刚才讨论的 $P(k+1)$ 在条件(30)时的情况.可以在有限步内解决.

如果 $f(x_1,x_2,\cdots,x_{k+1})\equiv 0$ 那么问题转换为

$$\begin{gathered}\mathrm{coeff}(g_i(x_1,x_2,\cdots,x_{k+1}),x_1,\\\mathrm{degree}(g_i(x_1,x_2,\cdots,x_{k+1}),x_1))\neq 0,\\c_i\cdot g_i(x_1,x_2,\cdots,x_{k+1})>0.\end{gathered}\tag{38}$$

根据公式(36)问题归约为:

是否存在 $(x_1,x_2,\cdots,x_{k+1})$ 使得

$$\begin{gathered}(\forall i,\mathrm{coeff}(g_i(x_1,x_2,\cdots,x_{k+1}),x_1,\\\mathrm{degree}(g_i(x_1,x_2,\cdots,x_{k+1}),x_1))\neq 0)\wedge\\((\forall i,(\exists l_i\text{s.t.}(\forall l,l<l_i\Rightarrow\\(\frac{\partial^l\,c_i\cdot g_i(x_1,x_2,\cdots,x_{k+1})}{\partial\,x_1^l}=0))\\\wedge(\frac{\partial^{l_i}\,c_i\cdot g_i(x_1,x_2,\cdots,x_{k+1})}{\partial\,x_1^{l_i}}\neq 0))\wedge\\(l_i\equiv 0(\mathrm{mod}2)\Rightarrow\\\frac{\partial^{l_i}\,c_i\cdot g_i(x_1,x_2,\cdots,x_{k+1})}{\partial\,x_1^{l_i}}>0)))\wedge\\(\forall i,j(l_i\equiv 1(\mathrm{mod}2)\wedge l_j\equiv 1(\mathrm{mod}2))\Rightarrow\\(\frac{\partial^{l_i}\,c_i\cdot g_i(x_1,x_2,\cdots,x_{k+1})}{\partial\,x_1^{l_i}}\cdot\\\frac{\partial^{l_j}\,c_j\cdot g_j(x_1,x_2,\cdots,x_{k+1})}{\partial\,x_1^{l_j}}>0)),\end{gathered}\tag{39}$$

(39)式是个在条件(29)下的问题 $P(k+1)$,可以在有限步内解决.综上所述,如果 $P(k)$ 可以在有限步内解决,那么 $P(k+1)$ 可以在有限步内解决.

根据数学归纳法,$P(n)$ 问题都可以在有限步内解决.

4　结语

本文给出算法判定有理系数多项式方程是否存在实数解.与文献[7]不同,本文根据杨路等人的多项式判别式的方法,不需要将多项式组化成互素的就可以判断多项式方程有没有实数解,而且本文详细介绍了如何将 n 变元半代数问题归约为 $n-1$ 变元的半代数问题.综上所述,本文给出了判断有理系数多项式方程是否存在实数解的

新的算法.

参考文献

[1] Cox D A, Little J, O' Shea D. Ideals, varieties, and algorithms[M]. NewYork: Springer, 2007.

[2] 陈玉福. 计算机代数讲义[M]. 北京:高等教育出版社,2009.

[3] 王东明,夏壁灿,李子明. 计算机代数[M]. 北京:清华大学出版社,2007.

[4] Yang L. Recent advances on determining the number of real roots of parametric polynomials[J]. Journal of Symbolic Computation, 1999, 28(1): 225-242.

[5] Dubé T W. The structure of polynomial ideals and Grobner bases[J]. SIAM Journal on Computing, 1990, 19(4): 750-773.

[6] Tarski A. A decision method for elementary algebra and geometry[M]. 2nd ed. Berkeley: Univ of Calif Press Berkeley, 1951.

[7] Ben-Or M, Kozen D, Reif J. The complexity of elementary algebra and geometry[J]. Journal of Computer and System Sciences, 1984, 32(2): 251-264.

[8] Yang L, Hou X, Xia B. A complete algorithm for automated discovering of a class of inequality-type theorems[J]. Science in China Series F Information Sciences, 2001, 44(1): 33-49.

[9] Mehlhorn K, Sagraloff M. A deterministic algorithm for isolating real roots of a real polynomial[J]. Journal of Symbolic Computation, 2011, 46(1): 70-90.

[10] Cheng J S, Gao X S, Guo L. Root isolation of zero-dimensional polynomial systems with linear univariate representation[J]. Journal of Symbolic Computation, 2012, 47(7): 843-858.

[11] Wang D. Automated deduction in geometry[M]. Berlin: Springer-Verlag, 1998.

[12] Yang L, Hou X R, Zeng Z B. A complete discrimination system for polynomials[J]. 中国科学 E 辑(英文版), 1996, 6: 8.