第 33 卷第 3 期　　中国科学院大学学报　　Vol. 33　No. 3
2016 年 5 月　　Journal of University of Chinese Academy of Sciences　　May　2016

文章编号:2095-6134(2016)03-0302-04

循环群的极大子群作用下的 Burnside 环的连续商群*

武海波[1],唐国平[2†]

(1 西北工业大学理学院,西安 710072; 2 中国科学院大学数学科学学院,北京 100049)

(2015 年 4 月 13 日收稿; 2015 年 10 月 9 日收修改稿)

Wu H B, Tang G P. Consecutive quotients of powers of Burnside ring of a cyclic group under action by the maximal subgroup[J]. Journal of University of Chinese Academy of Sciences, 2016,33(3):302-305.

摘　要　研究有限循环群的任一极大子群作用下的 Burnside 环的增广理想的基底,给出 n 次增广理想的一般表达式,并进一步讨论其连续商群的结构问题,得到一般情形下的同构分解式.

关键词　Burnside 环; 增广理想; 连续商群

中图分类号:O152　　**文献标志码:**A　　**doi:**10.7523/j.issn.2095-6134.2016.03.003

Consecutive quotients of powers of Burnside ring of a cyclic group under action by the maximal subgroup

WU Haibo[1], TANG Guoping[2]

(1 *School of Science*, *Northwestern Polytechnical University*, *Xi'an* 710072, *China*;
2 *School of Mathematical Sciences*, *University of Chinese Academy of Sciences*, *Beijing* 100049, *China*)

Abstract　In this work, the basis of augmentation ideal I of Burnside ring of a finite cyclic group under the action by any maximal subgroup is studied. The recursion formula of the nth power I^n of the augmentation ideal I is given. Furthermore, the consecutive quotient $I^n/I^{(n+1)}$ of the nth power I^n by the $(n+1)$th power of the ideal I is discussed, and its structure is determined in general.

Key words　Burnside ring; augmentation ideal; consecutive quotient

设 G 是有限群,有限集合 X 连同 G 在 X 上的作用称为有限 G - 集. 所有有限 G - 集范畴的 K_0 群实际上是一个环,称为 G 的 Burnside 环,记为 $\Omega(G)$. $\Omega(G)$ 的代数描述如下.

有限 G - 集 X,Y 的不相交并及其 G - 作用定义为

$$X \overset{d}{\cup} Y = (X \times \{1\}) \cup (Y \times \{2\}),$$

$$g \cdot (x,1) = (g \cdot x,1), g \cdot (y,2) = (g \cdot y,2).$$

所有有限 G - 集的同构类的集合在不相交并的运算下构成幺半群 M. 对 G 的任一子群 H,H 在 G 中的左陪集集合 $G/H = \{gH \mid g \in G\}$是一个 G - 集. G 在 G/H 上的作用自然地定义为左乘作用:

$$G \times G/H \to G/H, (g_1, g_2H) \to g_1g_2H.$$

众所周知, G/H 在这样定义的作用下是可迁的,任一可迁 G - 集均同构于某一形如 G/H 的 G -

* 国家自然科学基金(11371343)和西北工业大学基础研究基金(JCY20130139)资助
† 通信作者,E-mail: tanggp@ucas.ac.cn

集,且 G/H 与 G/H' 同构当且仅当 H 与 H' 在 G 中共轭. 记 $a_H = [G/H]$ 为有限 G - 集 G/H 的同构类. 若 G 的子群的共轭类恰有 c 个,由于每个 G - 集可以唯一地分解为可迁 G - 集的不相交并,因此 M 可看作以 $a_H, H \leqslant G$,为基底的自由交换幺半群 $\mathbb{N}^c$. M 的群完备 $\Omega(G)$ 是以 a_H 为基的自由交换群 $\mathbb{Z}^c$,称为 G 的 Burnside 环[1],其基元 a_H 与 a_K 的乘积由 G - 集 $G/H \times G/K$ 表示成不相交 G - 集之并来给出,但没有简单的乘积表达公式. 然而,如果 G 是有限交换群,关于 a_H 的乘法由以下易知的引理给出.

引理 1　令 G 是有限交换群,H,K 均为 G 的子群,则有 $a_H \times a_K = |G/HK| a_{H\cap K}$.

对 G 的每个子群 H,从 G 的 Burnside 环 $\Omega(G)$ 到整数环 $\mathbb{Z}$ 有典范的环同态 $\varphi_H: \Omega(G) \to \mathbb{Z}$,它把每个有限 G - 集 X 的同构类 $[X]$ 映射为集合

$$X^H = \{x \in X \mid h \cdot x = x, \forall x \in X\}$$

的基数. 特别地,对交换群 G 及 G 的任一子群 K,有

$$(G/K)^H = \{gK \in G/K \mid h \cdot gK = gK, \forall h \in H\} = \begin{cases} \varnothing, H \not\subset K; \\ G/K, H \subseteq K. \end{cases}$$

同态 φ_H 反映了 $\Omega(G)$ 的许多本质性质,例如 $\oplus \varphi_H: \Omega(G) \to \bigoplus_{H \leqslant G} \mathbb{Z}$ 是单同态等. 对 φ_H 的研究可以增进人们对 $\Omega(G)$ 的了解. $\Omega(G)$ 的增广理想 I_H 定义为典范同态 φ_H 的核,即 $I_H = \ker\varphi_H$. 于是

$$I_H = \sum_{H \not\subseteq K} \mathbb{Z}\, a_K + \sum_{\substack{H \subseteq K \\ K \neq G}} \mathbb{Z}\,(a_K - |G/K|).$$

记 I_H^n 为 I_H 的 n 次幂,则有理想的降链:

$$\Omega(G) \supseteq I_H \supseteq I_H^2 \supseteq \cdots \supseteq I_H^n \supseteq \cdots.$$

通常把连续商群 I_H^n / I_H^{n+1} 记作 $Q_n^H(G)$.

我们之所以关注 $Q_n^H(G)$,是希望通过对 $Q_n^H(G)$ 的研究来加深对 Burnside 环 $\Omega(G)$ 的了解. 举 2 个经典范例来说明这种研究途径. 对一个域 F,它的 Witt 环 $W(F)$ 有基本理想 I,这是 $W(F)$ 到 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 的同态核,而著名的 Milnor 猜想的实质就是搞清楚连续商群 I^n/I^{n+1} 的构造. 对整群环 $\mathbb{Z}$,其增广理想 I 为同态

$$\mathbb{Z}\,G \to \mathbb{Z},\ \sum a_g g \longmapsto \sum a_g$$

的核,它的 n 次幂与 $n+1$ 次幂的商记为 $Q_n(\mathbb{Z}\,G)$. 人们对 $Q_n(\mathbb{Z}\,G)$ 的结构进行了大量研究并获得了许多重要的结果. 例如,在文献[2]中,Passi 确定当 n 充分大且 G 是基本 p - 群时 $Q_n(\mathbb{Z}\,G)$ 的结构. 受此启发,Karpilovsky[3] 公开提出确定商群 $Q_n(\mathbb{Z}\,G)$ 的结构问题. Hales[4] 确定当 n 充分大时 $Q_n(\mathbb{Z}\,G)$ 的结构. Tang[5] 解决了当 G 是基本交换群时 $Q_n(\mathbb{Z}\,G)$ 的结构问题. 然而对任意的 n 及任意的有限交换群 G,$Q_n(\mathbb{Z}\,G)$ 的确切构造已由 Chang 和 Tang[6] 给出. 由于 $Q_n^H(G)$ 同构于 $Tor_1^{\Omega(G)}(\Omega(G)/I_H^n, \Omega(G)/I_H)$ [7],则关于 $Q_n^H(G)$ 的结果也就给出了 $Tor_1^{\Omega(G)}(\Omega(G)/I_H^n, \Omega(G)/I_H)$ 的结果.

引理 2　$Q_n^H(G)$ 是指数为 $|G|$ 的有限交换群.

证明　对 I_H 中元 a_K,由于 $a_K^2 = |G/K| a_K$,故 a_K 在 $Q_n^H(G)$ 中的像的周期整除 $|G/K|$.
若 $a_K - |G/K| \in I_H$,则由

$$(a_K - |G/K|)^2 = -|G/K|(a_K - |G/K|)$$

知 $a_K - |G/K|$ 在 $Q_n^H(G)$ 中的像的周期也整除 $|G/K|$,故 $Q_n^H(G)$ 是周期交换群. 又因为 I_H^n 是有限生成交换群,从而 $Q_n^H(G)$ 是有限交换群,其指数为 $|G|$. □

下面的 2 个问题是有趣且重要的:

1) 由引理 2 及正合列 $0 \to I_H^{n+1} \to I_H^n \to Q_n^H(G) \to 0$ 知 I_H^n 是秩为 $c-1$ 的自由交换群,它的基底是什么?

2) 确定有限交换群 $Q_n^H(G)$ 的结构. 然而,对一般的有限群,上述 2 个问题是比较复杂的. 我们仅考虑有限交换群的情形.

定义 1　设 G 是有限交换群,H 是 G 的极大子群,K 是 G 的子群. 若 G/K 可分解为 2 个群的直积,即 $G/K \cong G/K_1 \times G/K_2$,且 G/K_1 及 G/K_2 与 G/H 作为 G - 集是不同构的,则称 K 是 H 限制下可分解的. 否则称 K 是 H 限制下不可分解的.

令 G 是由 a 生成的 n 阶循环群,$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_s^{\alpha_s}$,$\alpha_i \geqslant 0$,$p_i$ 是两两互不相同的素数,$i = 1,2,\cdots,s$. 取 H 为 G 的极大子群. 显然,H 也是循环群,其阶不妨设为 $p_1^{\alpha_1 - 1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_s^{\alpha_s}$,即 H 是由 a^{p_1} 生成的. 对 G 的任一异于 H 的子群 K,有 $\varphi_H(a_K) = 0$,而 $\varphi_H(a_H) = p_1$,$\varphi_H(a_G) = 1$.

定理 1　设 G 是 n 阶循环群,$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_s^{\alpha_s}$,$\alpha_i \in \mathbb{Z}$,$p_i$ 是两两互不相同的素数,$i = 1,2,\cdots,s$. H 是 G 的阶为 $p_1^{\alpha_1 - 1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_s^{\alpha_s}$ 的极大子群. 则 $\Omega(G)$ 的 n 次增广理想 I_H^n 可表示为如下形式

$$I_H^n = \sum_{i=2}^{s}\mathbb{Z}\,a_{p_i}^n + \sum_{j=2}^{s}\sum_{i=2}^{\alpha_j}\mathbb{Z}\,a_{p_j}^{n-1}a_{p_j^i} + \sum_{i=2}^{\alpha_1}\mathbb{Z}\,a_{p_1^i}^n + \mathbb{Z}\,(a_H - p_1)^n + I_H^{n+1}.$$

证明 由 H 的极大性及增广理想的定义可知,

$$I_H = \sum_{K\neq H}\mathbb{Z}\,a_K + \mathbb{Z}\,(a_H - p_1) = \sum_{K\nsubseteq H}\mathbb{Z}\,a_K + \sum_{K\subseteq H}\mathbb{Z}\,a_K + \mathbb{Z}\,(a_H - p_1),$$

令 $I_1 = \sum_{K\nsubseteq H}\mathbb{Z}\,a_K, I_2 = \sum_{K\subseteq H}\mathbb{Z}\,a_K$, 则

$$I_H = I_1 + I_2 + \mathbb{Z}\,(a_H - p_1).$$

进而有

$$I_H^2 = I_1^2 + I_1I_2 + I_1(a_H - p_1) + I_2^2 + I_2(a_H - p_1) + \mathbb{Z}\,(a_H - p_1)^2.$$

任取 $a_K \in I_2$, 由 $K \subset H$ 且 $K \neq H$, 有

$$a_K(a_H - p_1) = |G/HK|a_{H\cap K} - p_1a_K = |G/H|a_K - p_1a_K = 0,$$

亦即

$$I_2(a_H - p_1) = 0. \tag{1}$$

任取 $a_K \in I_1$, 由于 $K \nsubseteq H$, 则 K 必包含 G 的 Sylow p_1 - 子群, 故

$$\left(\left|\frac{G}{K}\right|, p_1\right) = 1.$$

存在 $u, v \in \mathbb{Z}$, 使得 $up_1 + v|G/K| = 1$. 进而有

$$a_K(a_H - p_1) = up_1a_K(a_H - p_1) + v|G/K|a_K(a_H - p_1).$$

由引理 1 有, $-p_1(a_H - p_1) = (a_H - p_1)^2$, $|G/K|a_K = a_K^2$. 因此,

$$a_K(a_H - p_1) = -ua_K(a_H - p_1)^2 + va_K^2(a_H - p_1) \in I_H^3.$$

再由归纳法可得

$$I_1(a_H - p_1) \subseteq I_H^n. \tag{2}$$

任取 $a_K \in I_1, a_{K'} \in I_2$, 因为 $K' \subseteq H$ 且 $K \neq H$, 由定义 1 可知 $a_{K'}$ 可分解为 $a_{H_1}a_{K'_1}a_{K'_2}\cdots a_{K'_m}$, 其中 $|G/H_1| = p_1^l$. 考虑 $a_Ka_{H_1}$, 由于 $K \nsubseteq H$, 所以 $(|G/K|, p_1) = 1$, 从而 $(|G/K|, p_1^l) = 1$. 存在 $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$, 使 $1 = \alpha|G/K| + \beta p_1^l$. 则有

$$a_Ka_{H_1} = \alpha|G/K|a_Ka_{H_1} + \beta p_1^la_Ka_{H_1} = \alpha a_K^2a_{H_1} + \beta a_Ka_{H_1}^2.$$

若 $H_1 \neq H$, 则 $a_Ka_{H_1} \in I_H^3$. 由归纳法可知 $a_Ka_{H_1} \in I_H^n$. 若 $H_1 = H$, 则

$$a_{K'} = a_Ha_{K'_1}\cdots a_{K'_m}, m \geqslant 1,$$

进而

$$a_Ka_{K'} = a_Ka_{K'_1}\cdots a_{K'_m}(a_H - p_1) + p_1a_Ka_{K'_1}\cdots a_{K'_m} \in I_1(a_H - p_1) + I_1^n. \tag{3}$$

由关系(1)—(3)可知,

$$I_H^2 = I_1^2 + I_2^2 + \mathbb{Z}\,(a_H - p_1)^2 + I_H^n.$$

由于在 $\Omega(G)$ 中, a_K 不能分解当且仅当 G/K 是素数幂阶循环群. 因此 I_2^2 中只余那些阶为 $p_1^i, i = 2, \cdots, \alpha_1$, 的子群所对应的元. 而对 I_1 中的元 a_K, 由于 $K \nsubseteq H$, 可设 $|K| = p_1^{\alpha_1}p_2^{\beta_2}\cdots p_s^{\beta_s}$, 其中 $\beta_i \leqslant \alpha_i, i = 2, \cdots, s$. 则有

$$G/K = G/p_2^{\alpha_2-\beta_2} \times \cdots \times G/p_s^{\alpha_s-\beta_s} \triangleq G/K_2 \times \cdots \times G/K_s,$$

即 $a_K = a_{K_2}\cdots a_{K_s}$. 由引理 1 可知, 若 $|K'_i| = p_i^{\beta'_i}$, $|K''_i| = p_i^{\beta''_i}$, 则

$$a_{K'_i}\cdot a_{K''_i} = p_i^{\min\{\beta'_i,\beta''_i\}}a_{K'_i\cap K''_i}, i = 2, \cdots, s.$$

即同底数的素数幂阶循环群作乘积时只会留下幂次最小的, 亦即阶为 $p_i, i = 2, \cdots, s$ 的子群的共轭类 $a_{p_i}, i = 2, \cdots, s$. 所以有

$$I_H^2 = \sum_{i=2}^{s}\mathbb{Z}\,a_{p_i}^2 + \sum_{j=2}^{s}\sum_{i=2}^{\alpha_j}\mathbb{Z}\,a_{p_j}a_{p_j^i} + \sum_{i=2}^{\alpha_1}\mathbb{Z}\,a_{p_1^i}^2 + \mathbb{Z}\,(a_H - p_1)^2 + I_H^3.$$

再由数学归纳法可得

$$I_H^n = \sum_{i=2}^{s}\mathbb{Z}\,a_{p_i}^n + \sum_{j=2}^{s}\sum_{i=2}^{\alpha_j}\mathbb{Z}\,a_{p_j}^{n-1}a_{p_j^i} + \sum_{i=2}^{\alpha_1}\mathbb{Z}\,a_{p_1^i}^n + \mathbb{Z}\,(a_H - p_1)^n + I_H^{n+1}.$$ □

引理 3 设 $G = G_1 \times G_2$ 是有限交换群, 并且 $(|G_1|, |G_2|) = 1$, H 是 G 的子群, 则分别存在 G_1 的子群 H_1 和 G_2 的子群 H_2, 使得 $H = H_1 \times H_2$.

证明 令 $H_1 = H \cap G_1, H_2 = H \cap G_2$, 则有

$$H_1H_2 = H_1 \times H_2.$$

对任意 $h \in H$, 设 $h = g_1g_2, g_i \in G_i, i = 1,2, o(g_1) = s, o(g_2) = t$. 由于 $(|G_1|, |G_2|) = 1$, 则 $(s,t) = 1$, 进而存在 $u, v \in \mathbb{Z}$, 使得 $us + vt = 1$. 在 G/H 中, 因为 $g_1g_2H = H$, 即 $g_1H = g_2^{-1}H$, 因此

$$H = (g_1H)^s = (g_2^{-1}H)^s = g_2^{-s}H,$$

故 $g_2^{-s} \in H$. 又因为 $g_2 = g_2^{us+vt} = g_2^{us} \in H$, 从而 $g_2 \in H \cap G_2$. 同理有 $g_1 \in H \cap G_1$. 于是 $H = H_1H_2 = H_1 \times H_2$. □

命题 1 设 $G = G_1 \times G_2$ 是有限交换群, 并且

$$(|G_1|, |G_2|) = 1, H = H_1 \times H_2,$$

$H_i \leqslant G_i, i = 1,2$, 是 G 的子群, 则有

$$Q_n^H(G) = Q_n^{H_1}(G_1) \times Q_n^{H_2}(G_2).$$

证明 因为 I_H 由 $a_K, H \nsubseteq K$, 及 $a_K - |G/K|, H \subseteq$

$K, K \neq G$，生成，对 I_H 中元 a_K，$H \nsubseteq K$，由引理 3 有分解 $K = K_1 \times K_2$，则 $K_1 \neq G_1$ 或 $K_2 \neq G_2$. 故由引理 1 可得 I_H 中的关系式

$$a_K = a_{G_1 \times K_2} a_{K_1 \times G_2},$$

或

$$a_K = (a_{G_1 \times K_2} - |G/(G_1 \times K_2)|) a_{K_1 \times G_2} + |G/(G_1 \times K_2)| a_{K_1 \times G_2},$$

或

$$a_K = a_{G_1 \times K_2}(a_{K_1 \times G_2} - |G/(K_1 \times G_2)|) + |G/(K_1 \times G_2)| a_{G_1 \times K_2}.$$

若 $H \subseteq K$ 且 $K \neq G$，由于

$$\begin{aligned}(a_K - |G/K|) = {} & (a_{G_1 \times K_2} - |G/(G_1 \times K_2)|) \times \\ & (a_{K_1 \times G_2} - |G/(K_1 \times G_2)|) + \\ & |G/(K_1 \times G_2)|(a_{G_1 \times K_2} - \\ & |G/(G_1 \times K_2)|) + \\ & |G/(G_1 \times K_2)|(a_{K_1 \times G_2} - \\ & |G/(K_1 \times G_2)|),\end{aligned}$$

故 I_H 中生成元在 Q_1^H 中的像均可表示成 $Q_1^{H_1}$ 与 $Q_1^{H_2}$ 中元之和，从而 Q_n^H 中元可表示为 $Q_n^{H_1}$ 与 $Q_n^{H_2}$ 中元之和. □

由命题 1 可知，可以将讨论有限交换群的增广商群的结构问题转化为讨论有限交换 p - 群的增广商群的结构问题.

定理 2　设 G 是有限循环 p - 群，$|G| = p^s$，H 是 G 的极大子群，则有

$$Q_n^H(G) \cong (\mathbb{Z}_{p^2})^{s-1} \oplus \mathbb{Z}_p.$$

证明　由于 G 是有限循环 p - 群，$|G| = p^s$，H 是 G 的极大子群，因此 G 共有 $s-1$ 个异于 H 的真子群 H_i，$|H_i| = p^i$，$0 \leqslant i \leqslant s-2$. 由增广理想的定义可知

$$I_H = \sum_{i=0}^{s-2} \mathbb{Z}\, a_{H_i} + \mathbb{Z}\,(a_H - p).$$

令 $I_1 = \sum_{i=0}^{s-2} \mathbb{Z}\, a_{H_i}$，则

$$I_H^2 = I_1^2 + I_1(a_H - p) + \mathbb{Z}\,(a_H - p)^2.$$

任取 $a_{H_i} \in I_1$，由引理 1 及 H 的极大性，有

$$a_{H_i}(a_H - p) = |G/H_iH| a_{H_i \cap H} - p a_{H_i} = p a_{H_i} - p a_{H_i} = 0.$$

亦即 $I_1(a_H - p) = 0$.

任取 $a_{H_i}, a_{H_j} \in I_1$，由于

$$a_{H_i} a_{H_j} = |G/H_iH_j| a_{H_i \cap H_j} = \begin{cases} |G/H_i| a_{H_i}, i = j; \\ |G/H_j| a_{H_i}, i < j; \\ |G/H_i| a_{H_j}, i > j. \end{cases}$$

所以

$$\begin{aligned} I_1^2 &= \sum_{i=0}^{s-2}\sum_{j=0}^{s-2} \mathbb{Z}\, a_{H_i} a_{H_j} = \sum_{i=0}^{s-2}\sum_{j=i}^{s-2} \mathbb{Z}\,|G/H_j| a_{H_i} \\ &= \sum_{i=0}^{s-2} \mathbb{Z}\,|G/H_{s-2}| a_{H_i} = \sum_{i=0}^{s-2} \mathbb{Z}\, a_{H_i} a_{H_{s-2}}. \end{aligned}$$

进而，

$$I_H^2 = \sum_{i=0}^{s-2} \mathbb{Z}\, a_{H_i} a_{H_{s-2}} + \mathbb{Z}\,(a_H - p)^2.$$

再由数学归纳法可知

$$I_H^n = \sum_{i=0}^{s-2} \mathbb{Z}\, a_{H_i} a_{H_{s-2}}^{n-1} + \mathbb{Z}\,(a_H - p)^n.$$

由于 $a_{H_i} a_{H_{s-2}}^{n-1} = p^2 a_{H_i} a_{H_{s-2}}^{n-2}$ 及 $(a_H - p)^n = -p(a_H - p)^{n-1}$，这亦给出了 I_H^n 的一组基底元 $a_{H_i} a_{H_{s-2}}^{n-1}$ 及 $(a_H - p)^n$. 从而有

$$Q_n^H(G) = I_H^n / I_H^{n+1} \cong (\mathbb{Z}_{p^2})^{s-1} \oplus \mathbb{Z}_p.$$ □

参考文献

[1] Magurn B A. An algebraic introduction to K-theory [M]. Cambridge University Press, 2002:135-140.

[2] Passi I B S. Group ring and their augmentation ideals[M]. New York:Springer-Verlag,1979.

[3] Karpilovsky G. Commutative group algebra[M]. New York: Marcel Dekker, 1983.

[4] Hales A W. Augmentation terminals of finite abelian groups [J]. Springer-Verlag Lecture Notes in Math, 1983,1006: 720-733.

[5] Tang G P. On a problem of karpilovsky [J]. Algebra Colloquium, 2003,10(1):11-16.

[6] Chang S, Tang G P. A basis for augmentation quotients of finite abelian groups[J]. Journal of Algebra,2011,327(1): 466-488.

[7] Weibel C A. An introduction to homological algebra[M]. Beijing: China Machine Press, 2004.