

# 平面 Bézier 曲线细分算法的参数优化<sup>\*</sup>

马晓辉, 林凤鸣, 申立勇<sup>†</sup>

(中国科学院大学数学科学学院, 北京 100049)  
(2015 年 12 月 4 日收稿; 2016 年 1 月 21 日收修改稿)

Ma X H, Lin F M, Shen L Y. Optimal subdivision parameters for planar Bézier curves[J]. Journal of University of Chinese Academy of Sciences, 2016,33(3):311-316.

**摘 要** 复杂曲线逼近是 CAGD 中的基本问题,传统 de Casteljau 算法通常固定细分参数为 0.5. 本文考虑平面 Bézier 曲线的凸包最小和扁平度最小两种情况,分别给出凸包最优和扁平度最优的细分参数的定义和计算方法,使每次细分后得到的新控制多边形更好地逼近原曲线. 通过分析不同类型曲线的最优参数发现,对于较小的曲线段,细分参数选为 0.5 具有一定的合理性. 比较扁平最小方法与 de Casteljau 定参数方法发现:对于形状复杂的曲线,前者细分效率提高 50% 以上;对于简单曲线,二者相当.

**关键词** 平面 Bézier 曲线; 细分参数; 扁平度; 凸包面积

中图分类号:O242.2; TP391.7 文献标志码:A doi:10.7523/j.issn.2095-6134.2016.03.005

## Optimal subdivision parametes for planar Bézier curves

MA Xiaohui, LIN Fengming, SHEN Liyong

(School of Mathematical Sciences, University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China)

**Abstract** Complex curve approximation is a basic problem in CAGD, and the traditional de Casteljau algorithm is commonly used with the fixed parameter value of 0.5. To achieve better subdivided curves in approximation, we consider two different choices of the subdivision parameters for the planar Bézier curves. The two choices of the parameter are associated with convex hull area minimization and convex hull flat minimization. The definitions and algorithms of the parameters are proposed in both cases. By analyzing the parameters for different types of curves, we find that the optimal parameter volues are close to 0.5 when the curve segments are short enough. This fact indicates that it is reasonable to select the parameter value of 0.5 for the small curve segments. For some complex curves the least flat method improves the efficiency of the subdivision by more than 50%, compared to the traditional de Casteljau method. For other curves, the two methods have similar efficiency.

**Key words** planar Bézier curve; subdivision parameter; polygon flattening; convex hull area

<sup>\*</sup> 北京市科技新星计划(Z121104002512065)资助

<sup>†</sup> 通信作者, E-mail: lyshen@ucas.ac.cn

曲线是计算机辅助几何设计 (CAGD) 中的基本研究对象之一, 曲线的研究包括表示形式分析、几何特性分析、曲线逼近和求交分析等<sup>[1-3]</sup>. 在曲线逼近的研究方法中, 一个重要的方法是细分方法. 细分方法是基于网格细化的离散表示方法, 它可以从任意拓扑网格构造光滑曲线/曲面<sup>[1]</sup>. 其基本思想是: 对给定的初始控制点及其拓扑关系, 定义一个细分规则, 在给定的初始网格中插入新的顶点, 从而不断细化产生一个新的网格序列. 理论上, 在细分极限时, 该网格序列收敛于一条光滑曲线或者一张光滑曲面<sup>[4-6]</sup>.

Bézier 形式是 CAGD 中的经典表示形式, 它赋予控制系数以明确的几何意义, 并且还有其他便于造型设计的良好性质, 例如凸包性、变差缩减性<sup>[1-2,5]</sup>等, 因而也是曲线、曲面表示的常用形式<sup>[7-8]</sup>. 平面 Bézier 曲线的分段线性逼近可以通过著名的 de Casteljau 算法实现. de Casteljau 算法属于细分方法, 人们常以 0.5 为参数细分点<sup>[5-6]</sup>, 我们称之为定参数方法. 本文将考虑如何更好地选择细分参数, 从而得到效率更高的细分算法. 曲线细分的本质是寻找一种线性逼近, 即若干次细分后, 每一段曲线已经接近直线段, 从而可以用折线段代替原曲线. 因此细分过程中, 需要优化细分参数, 使得折线段可以快速逼近真实的曲线. 根据平面 Bézier 曲线的包围盒性质, 可通过要求细分曲线段包围盒面积最小或者尽量扁平来实现细分优化, 本文将讨论这两种优化条件下的细分算法.

对于 2 次平面 Bézier 曲线而言, 当细分参数为 0.5 时, 获得的细分控制多边形的面积是最小的. 3 次及以上的一般平面 Bézier 曲线无此结果, 细分包围盒扁平度也不在参数 0.5 时达到最小. 因此对于高次数形状复杂的平面 Bézier 曲线, 需要分别根据优化条件计算细分参数. 通过选择合适的参数, 使得得到的细分曲线的凸包<sup>[3]</sup>面积最小或者控制多边形最扁平, 从而很好地贴近 Bézier 曲线, 以达到折线逼近曲线的效果. 准确优化细分参数的求解需要一定计算量, 我们根据算例结果给出了合理的数值遍历方法. 根据细分若干次以后参数变化区域缩小的实际情况, 只在算法的前  $N$  步中计算最优参数. 最终的数值化算法在效率上高于 de Casteljau 定参数算法.

1 基础知识

我们称  $n$  次多项式  $B_i^n(t) = \binom{n}{i} t^i (1 - t)^{n-i}$  为  $n$  次 Bernstein 基函数, 其中  $i = 0, 1, \dots, n, t \in [0, 1]$ , 则  $n$  次平面 Bézier 曲线定义如下.

**定义 1.1** 给定  $n + 1$  个向量  $P_i \in \mathbf{R}^2$ , 其中  $i = 0, 1, \dots, n$ . 我们称  $P(t) = \sum_{i=0}^n P_i B_i^n(t)$  为一条  $n$  次平面 Bézier 曲线,  $P_i$  为控制顶点. 依次用直线段连接相邻 2 个  $P_i$  所得到的  $n$  边折线多边形称为 Bézier 多边形或者控制多边形.

我们不加证明地给出本文相关的平面 Bézier 曲线性质.

**性质 1.1**<sup>[2,5]</sup> I (几何不变性) 平面 Bézier 曲线的位置和形状只与特征多边形顶点的位置有关, 它不依赖于坐标系的选择.

II (凸包性) 平面 Bézier 曲线  $P(t), t \in [0, 1]$  总落在其控制点  $P_i$  构成的凸包中.

III (变差缩减性质) 对于平面曲线, 任意直线和 Bézier 曲线的交点个数不多于该直线与控制多边形交点数.

若给定参数值  $t^* \in [0, 1]$ , 可以通过代入计算得到曲线上一点  $P(t^*)$ . 也可以直接用控制点计算得到  $P(t^*)$ , 即由 de Casteljau 算法求出所定义的平面 Bézier 曲线上的一点  $P(t^*)$ .

Bézier 曲线的 de Casteljau 算法公式<sup>[5]</sup>

$$\begin{cases} P_i^0(t^*) \equiv P_i^0 = P_i, & i = 0, \dots, n. \\ P_i^r(t^*) = (1 - t^*) P_{i-1}^{r-1}(t^*) + t^* P_{i+1}^{r-1}(t^*). \end{cases} \quad (1)$$

其中,  $r = 1, \dots, n, i = 0, \dots, n - r$ . 由 de Casteljau 算法求出所定义的 Bézier 曲线上的一点  $P(t^*)$ , 同时该点把曲线分为 2 个  $n$  次的子曲线段:  $P(t), t \in [0, t^*]$  和  $P(t), t \in [t^*, 1]$ , 即 de Casteljau 算法给出了 Bézier 曲线的一个分割 (细分). 2 个细分曲线段  $P^l(t)$  和  $P^r(t)$  所对应的新 Bézier 控制顶点分别为  $P_0^0, P_0^1(t^*), \dots, P_0^n(t^*)$  和  $P_0^n(t^*), P_1^{n-1}(t^*), \dots, P_n^0$ , 这 2 组控制顶点给出了 2 个子曲线段分别在各自局部参数域  $[0, 1]$  上的 Bézier 表示.

应用 de Casteljau 算法进行细分, 人们一般固定细分参数  $t = 0.5$ , 本文称之为定参数算法 (定

参法). 细分过程是对曲线在  $t = 0.5$  处进行细分, 并且对细分曲线重复该过程, 依次进行下去, 在进行  $k$  次细分后以  $2^k$  个平面 Bézier 多边形结束, 每一个多边形描述原来曲线的一小段. 如果  $k$  取值足够大, 这些小曲线段将近乎于直线段, 根据凸包性, 此时可以用控制多边形逼近原曲线. 下面采用 2 种方式选择细分参数, 使得细分后的曲线段能够更加快速地被直线段逼近.

## 2 细分参数选取

首先我们考虑细分曲线的凸包面积最小条件下对应的参数, 定义如下.

**定义 2.1** 记平面 Bézier 曲线  $P(t)$  的凸包面积为  $\text{Area}(P(t))$ , 则对给定曲线  $P(t)$ , 其凸包最优参数定义为  $t^* = \arg(\min_t (\text{Area}(P^l(t)) + \text{Area}(P^r(t)))$ .

**性质 2.1** 二次平面 Bézier 曲线的凸包最优参数  $t^* = 0.5$ .

**证明** 根据 Bézier 曲线几何不变性和仿射变换, 可设二次 Bézier 曲线的控制点为  $(-1, 0)$ ,  $(0, 1)$ ,  $(a, b)$ , 不妨设  $b > 0$ . 则细分后 2 个控制多边形的凸包面积分别为  $S_1 = bt^3$ ,  $S_2 = b(1-t)^3$  则细分后 2 个凸包面积和为  $S = S_1 + S_2 = b(3t^2 - 3t + 1)$ , 在  $t^* = 0.5$  处取得最小值, 故最优参数  $t^* = 0.5$ .  $\square$

对于 3 次以上的平面 Bézier 曲线, 其凸包最优参数不再固定为 0.5. 需要更多限制条件才有相应结果. 称  $n$  次平面 Bézier 曲线  $P(t)$  是轴对称, 如果其控制点  $P_i$  和  $P_{n-i}$ ,  $i = 0, \dots, n$  关于  $P_0P_n$  的中垂线对称.

**性质 2.2** 设  $P(t)$  是具有凸控制多边形的轴对称平面 Bézier 曲线, 则  $t^* = 0.5$  是细分凸包面积和函数的极值点; 进一步若细分凸包面积函数在  $(0, 1)$  上是凸的, 则  $t^* = 0.5$  是凸包最优参数.

**证明** 根据 Bézier 曲线的变差缩减性, 具有凸控制多边形的 Bézier 曲线为凸曲线, 则对于细分曲线  $P^l(t)$  和  $P^r(t)$ ,  $f(t) = \text{Area}(P^l(t))$  和  $g(t) = \text{Area}(P^r(t))$  在  $t \in [0, 1]$  上分别是单调增加和单调减少的. 控制多边形是凸的, 则  $f(t) + g(t)$  在边界点  $t = 0$  或 1 处取极大值. 又根据曲线对称性和 Bézier 表示的参数对称性, 有  $g(t) = f(1-t)$ , 则  $f(t) + g(t) = f(t) + f(1-t)$ . 考虑其一阶

导数的  $(f(t) + f(1-t))' = f'(t) - f'(1-t)$ , 可以发现  $t^* = 0.5$  是一极值点.

进一步, 若  $f(t)$  为凸函数, 则  $f(t) + f(1-t)$  在  $(0, 1)$  上无其他极值点, 否则有  $t_0 \in (0, 1)$  使得  $f'(t_0) = f'(1-t_0)$ , 与  $f(t)$  在  $(0, 1)$  上为凸矛盾,  $t^* = 0.5$  不是极大值点, 因此只能为最小值点, 即凸包最优参数.  $\square$

3 次以上一般曲线凸包最优参数值不再是固定值, 而上述性质在曲线一次细分之后不能再保持, 因此一般复杂曲线的凸包最优参数需要计算得到. 给定足够小的  $\varepsilon$ , 当  $\text{Area}(P(t)) < \varepsilon$  时, 则认为凸包足够小, 可以用控制多边形逼近原曲线段.

其次, 我们考虑另一优化参数条件, 使得细分曲线控制多边形尽量扁平.

**定义 2.2** 设  $P_i (i=0, 1, \dots, n)$  为平面 Bézier 曲线  $P(t)$  的控制多边形顶点,  $D(P_0P_n, P_i)$  是  $P_i$  到  $P_0P_n$  的距离, 记  $\text{Dis}(P(t)) = \sum_i (D(P_0P_n, P_i))^2$  为  $P(t)$  的扁平度, 则曲线  $P(t)$  扁平度最优参数定义为  $t^* = \arg(\min_t (\text{Dis}(P^l(t)) + \text{Dis}(P^r(t))))$ .

**性质 2.3** 对称二次平面 Bézier 曲线的扁平度最优参数  $t^* = 0.5$ .

**证明** 设二次 Bézier 曲线的控制点为  $P_0 = (-1, 0)$ ,  $P_1 = (0, a)$ ,  $P_2 = (1, 0)$ , 不妨设  $a \geq 0$ , 令细分参数为  $t$ , 则得到 2 个子曲线  $P^l(t)$ ,  $P^r(t)$  对应的控制多边形, 根据定义 2.2, 我们得到只要求解以下问题的最小值点即可:

$$\begin{aligned} \text{Dis}(t) &= \text{Dis}(P^l(t)) + \text{Dis}(P^r(t)) \\ &= \frac{at^2}{\sqrt{(a-at)^2 + 1}} + \frac{a(t-1)^2}{\sqrt{a^2t^2 + 1}}, \end{aligned} \quad (2)$$

其中,  $0 \leq t \leq 1$ , 并且  $a \geq 0$ . 经计算  $\text{Dis}(t)$  在  $t^* = 0.5$  取极值, 又  $\text{Dis}(0) = \text{Dis}(1) = a >$

$\text{Dis}(0.5) = \frac{a}{\sqrt{a^2 + 4}}$ , 故最优细分参数为  $t^* =$

0.5.  $\square$

一般平面曲线都不具有固定的扁平度最优参数, 需要计算得到. 若给定足够小的  $\varepsilon$ , 当  $\text{Dis}(P(t)) < \varepsilon$  时, 我们认为控制多边形足够扁平, 可以用控制多边形逼近原曲线段.

根据上述定义, 当细分过程中某子细分曲线有  $\text{Area}(P(t)) < \varepsilon$  (或  $\text{Dis}(P(t)) < \varepsilon$ ), 停止该细分曲线的进一步细分, 用控制多边形作为该部分曲线的近似. 当所有的细分曲线段都停止细分,

就得到了原 Bézier 曲线的一个近似折线段逼近. 下面分别给出凸包最优参数和扁平度最优参数的算法描述.

凸包最优参数算法(凸包法):

输入:  $P_i (i = 0, \dots, n)$  为给定的一条平面 Bézier 曲线的控制多边形顶点.

输出: 凸包最优细分参数  $t_0$ .

1) 假定  $t$  为细分参数, 根据 de Casteljau 算法, 得到其 2 个子控制多边形  $T_1, T_2$  的顶点, 它们均为关于  $t$  的参数;

2) 设  $T_1$  的顶点为  $V_i (i = 0, \dots, n)$ , 计算出顶点集  $T_1$  的凸包的面积  $\text{Area}_1$ , 同样求出  $T_2$  对应的凸包面积  $\text{Area}_2$ , 考虑令  $\text{Area}(t) = \text{Area}_1 + \text{Area}_2$ , 它是  $t$  的函数, 求  $t_0 (0 < t_0 < 1)$  为  $\text{Area}(t)$  最小值点.

扁平度最优参数算法(扁平法):

输入:  $P_i (i = 0, \dots, n)$  为给定的一条平面 Bézier 曲线的控制多边形顶点.

输出: 扁平度最优细分参数  $t_0$ .

1) 假定  $t$  为细分参数, 根据 de Casteljau 算法, 得到其 2 个子控制多边形  $T_1, T_2$  的顶点, 它们均为关于  $t$  的参数;

2) 设  $T_1$  的顶点为  $V_i (i = 0, \dots, n)$ , 计算出顶点  $V_i (i = 1, \dots, n-1)$  到  $V_0 V_n$  的几何距离为  $d_{1i}$ , 求  $s_1 = \sum_{i=1}^{n-1} d_{1i}^2$ , 同样地求出  $s_2 = \sum_{i=1}^{n-1} d_{2i}^2$ , 令  $s = s_1 + s_2$ , 求函数的极小值点  $t_0 (0 < t_0 < 1)$ .

上述算法理论上都有准确解, 但是求准确解需要进行符号求解高次多项式的根, 运算量较大, 因而我们对算法进行了数值化改进. 根据大量算例测试, 最优参数几乎都落在区间  $t \in [0.2, 0.8]$  之中, 因此我们用数值遍历选择最优参数, 即通过遍历  $t = 0.2 + 0.05 \cdot k (k = 0, 1, \dots, 12)$ , 寻找凸包最优参数或扁平度最优参数. 而经过若干次细分后, 这里设为  $N$  次, 再往后的细分参数基本在 0.5 附近. 实际上, 经过  $N$  次细分后, 曲线段已经较短且基本都是单弧形, 而我们知道单个弧形曲线是可以二次曲线逼近的, 而根据性质 2.1 和 2.3,  $t^* = 0.5$  是二次曲线的最优参数合理选择, 因此  $N$  步以后我们不用再做参数优化选取, 直接取 0.5 即可.

数值化算法得到的细分参数不一定是严格的最优参数, 但是速度有极大提高, 而且与定参数方

法相比, 尤其对于高次复杂平面 Bézier 曲线的细分, 我们的算法有效率优势.

### 3 实例及算法分析

我们针对不同的高次复杂平面 Bézier 曲线分别使用定参数方法、凸包最优参数及扁平度最优参数算法进行了算例检验. 实验测试平台为配备 Intel Core i3 处理器及 4 G 内存的 HP431 笔记本电脑, 测试软件为 Matlab R2014a.

首先给定精度  $\varepsilon$  以及算法终止条件, 进行曲线逼近算法比较. 由于 Bézier 细分算法本身具有良好的效果, 精度很小就可以很好地逼近, 在本文中, 取  $\varepsilon = 1 \times 10^{-5}$ , 实验结果表明在此精度下优良的拟合效果得到足够保证. 为了做同精度下的算法效率比较, 对于由  $\{P_i^* \}_{i=0, \dots, n}$  定义的细分曲线我们设定了统一的精度终止条件:

$$\frac{\max_{i \in \{1, \dots, n-1\}} (D(P_0^* P_n^*, P_i^*))}{\max(y_{\max} - y_{\min}, x_{\max} - x_{\min})} \leq \varepsilon. \quad (3)$$

其中,  $x_{\max} = \max\{x_i \mid P_i = (x_i, y_i), i = 0, 1, \dots, n\}$  为原始曲线最右控制点对应的横坐标值,  $x_{\min}, y_{\max}, y_{\min}$  定义类似, 该分母的选取是为精度误差不受仿射变换影响.

其次设定算法效率比较的标准, 我们采用比较算法提高率来进行判断. 提高率是指计算时间提高率:

提高率 = (定参数运算时间 - 改进算法运算时间) / 定参数运算时间.

这里的改进算法运算时间包括参数选取和曲线细分两部分的计算时间. 最后通过算例演绎算法差异. Bézier 曲线随次数不断增高, 曲线复杂度不断增大. 我们选取次数逐渐增大的一组平面 Bézier 曲线作为算例. 由于曲线次数较低时, 算法迭代次数也相应较少, 2 种改进算法在前  $N$  次遍历寻找最优参数中所花费的时间是固定参数法的倍数级, 占用较多时间, 使得效率没有明显提高, 这里我们舍弃低次 Bézier 曲线.

我们用交互输入方法随机点画了 10 条次数从 12 不断提高的平面 Bézier 曲线, 测试定参数方法和 2 种改进算法的运算速度.

图 1 给出 Bézier 曲线及其控制多边形细分比较, 分别利用定参数方法和 2 种改进算法进行了一次细分.

提高曲线次数获得更高的复杂性(参数选取

固定  $N=3$ ),表 1 列出 3 种方法的运算时间.2 个改进算法的速度均与其对应的前  $N$  次细分参数选择有关,当给定的  $N$  较好时,改进算法的计算速度会相应地提高,当  $N=0$  时,则改进算法都退化为固定参数算法.一般而言,算法时间先随  $N$  的增大而减少,到某一  $N$  以后,算法时间随  $N$  的增大而增加. $N$  的选择有赖于曲线的复杂度,越复杂的曲线合适的  $N$  也越大.经过多次实验验证,本次算例测试中取  $N=3$ .

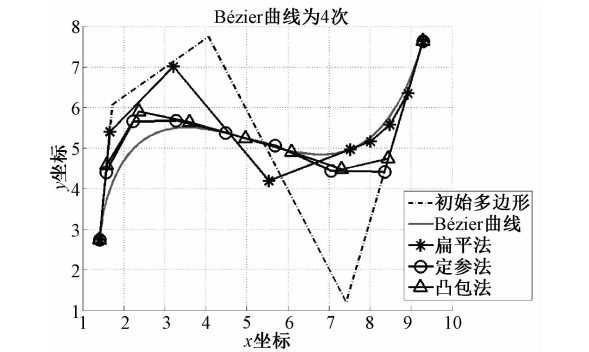


图 1 不同细分算法细分一次的比较结果  
Fig.1 Comparative results of different algorithms after the first subdivision

表 1 曲线复杂性和算法计算时间、迭代次数算例								
Table 1 Computing examples for different algorithms								
曲线次数	定参法时间/s	定参法迭代次数	扁平法时间/s	扁平法迭代次数	凸包法时间/s	凸包法迭代次数	定参法提高率/%	凸包法提高率/%
12	0.38	10	0.39	10	0.42	10	-1.1	-9.2
13	1.26	11	0.43	10	1.27	11	65.5	-0.9
16	1.78	11	0.59	10	1.82	11	66.9	-2.6
17	1.94	11	1.84	11	1.99	11	5.1	-2.2
18	2.27	11	2.18	11	9.09	12	2.6	-306.5
19	2.40	11	0.77	10	10.1	12	68.0	-318.5
20	2.62	11	2.66	11	11.4	12	-1.5	-335.6
22	3.38	11	0.87	10	13.8	12	74.3	-308.7
24	3.89	11	3.79	11	16.0	12	2.5	-312.5
25	4.00	11	3.88	11	16.7	12	2.9	-318.3

从表 1 的结果可看出,在高次复杂曲线上,相对于定参法,扁平法的效果有着显著提高.而凸包法则几乎没有提高效果.凸包法本意是希望凸包面积较小的曲线容易细分逼近,实际计算情况并非如此,说明通过凸包面积控制曲线造型复杂程度不合理,不适用于改善细分算法.

在平面 Bézier 曲线细分过程中,假设所有曲线段每次都做细分,第  $i$  次细分需处理  $2^i$  条曲线

段( $i=0,1,\cdots,n$ ),则前  $n$  次迭代共需要  $\sum_{i=0}^n 2^i = 2^{n+1} - 1 \approx 2^{n+1}$  (当  $n$  较大时) 次细分运算,而第  $n+1$  次迭代需做  $2^{n+1}$  次细分,因此少一次迭代相当于减少一半的单步细分运算.这样,当  $n$  较大时前 3 次遍历寻找最优参数计算所占的时间比重很小.所以算法效率提高的关键在于经过改进,可以使迭代次数减少,从而大大减少了细分计算.

上述算例中扁平法效率提高较多的 13、16、19、22 次曲线,它们的细分次数比定参法少 1 次,算法效率就可提高 70% 左右,实验结果与理论分析相符(图 2,由于细分足够多,因此曲线被细分控制点完全遮挡).工程应用中,设计曲线类型复杂,因而对于未知复杂曲线有优势,细分算法是值得推荐的.其他曲线,定参法与扁平法的迭代次数相同,扁平方法略占优势.

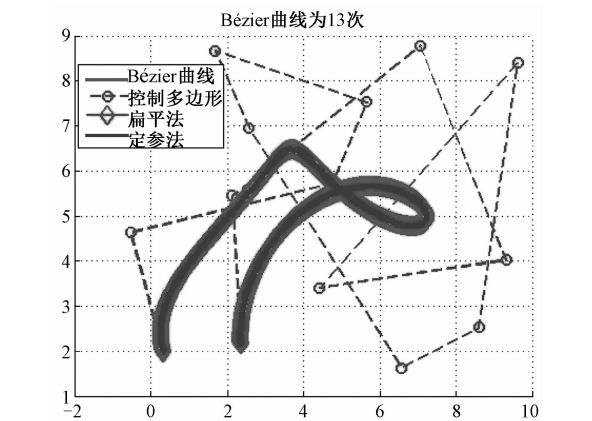


图 2 效率提高较多的曲线  
Fig.2 Curves having better performance

可以看出,曲线形状越复杂,扁平法提高效果越好,而越接近于简单抛物线形状的曲线,扁平法和定参法效率相当.

## 4 结论

本文研究平面 Bézier 曲线的细分参数选取,在传统的 de Casteljau 法固定细分参数的基础上,给出凸包面积最优、扁平度最优两种最优参数选取条件和算法,并且给出了加速的数值算法,实例检验表明凸包面积最优方法不适用于细分优化,算法效率没有提高效果,而扁平度最优方法效率提高优势明显,新算法对于形状复杂、次数较高的平面 Bézier 曲线可以有效减少细分迭代次数,大幅提高算法效率.

在 CAGD 应用中,曲面细分逼近应用更为广泛,我们在后继工作中将进一步进行曲面优化参数的定义和细分算法设计,并且设计基于曲面复杂性的最优优化步数  $N$  的自适应选取算法.

参考文献

[ 1 ] Morin G, Goldman R. On the smooth convergence of subdivision and degree elevation for Bézier curves [ J ]. Computer Aided Geometric Design, 2001, 18 ( 7 ) :657-666.

[ 2 ] Farin G. Curves and surfaces for CAGD [ M ]. 5th ed. New York: Academic Press, 2002.

[ 3 ] 郑红婵. 几何造型中的若干细分方法研究及其应用 [ D ]. 西安:西北工业大学, 2006.

[ 4 ] 王仁宏,李崇君,朱春钢. 计算几何教程 [ M ]. 北京:科学出版社,2008.

[ 5 ] 莫蓉,常智勇. 计算机辅助几何造型技术 [ M ]. 北京:科学出版社,2009.

[ 6 ] 汪嘉业,王文平,屠长河,等. 计算几何及应用 [ M ]. 北京:科学出版社, 2011.

[ 7 ] Zhang M, Yan W, Yuan C M, et al. Curve fitting and optimal interpolation on CNC machines based on quadratic B-splines [ J ]. Science China: Information Sciences,2011 ( 7 ) : 1 407-1 418.

[ 8 ] Wei F F, Feng J Q. Real-time rendering of algebraic B-spline surfaces via Bézier point insertion [ J ]. Science China: Information Sciences,2014 ( 1 ) :71-85.