文章编号:2095-6134(2016)03-0317-12

半定规划的齐次不可行内点算法*

吴　岳[1†], 刘红卫[1], 谢　迪[2]

(1 西安电子科技大学数学与统计学院, 西安 710126; 2 兰州理工大学理学院, 兰州 730050)

(2015 年 3 月 18 日收稿; 2015 年 9 月 15 日收修改稿)

Wu Y, Liu H W, Xie D. A homogeneous infeasible-interior-point algorithm for semidefinite programming[J]. Journal of University of Chinese Academy of Sciences, 2016,33(3):317-328.

摘　要　为降低半定规划(SDP)问题的迭代复杂度,并且有更好的数值实验结果,提出一种新的宽邻域上的齐次不可行内点算法.半定规划的 KKT 条件是单调互补问题(MCP),通过构造齐次模型(HMCP)以及提出新的宽邻域来解这个齐次模型,得到半定规划问题的最优解.这种算法容易判定原问题是否可行.在 NT 方向,证明迭代点在新的宽邻域内是收敛的,且迭代复杂度为 $O(\sqrt{n}\log L)$,其中 n 是 SDP 问题的维数,$L = \mathrm{Tr}(\boldsymbol{X}^0 \boldsymbol{S}^0)/\varepsilon$,其中 ε 是需要的精度,$(\boldsymbol{X}^0,\boldsymbol{S}^0)$ 是迭代起始点.这个复杂度比一般的半定规划不可行算法的迭代复杂度低.提供了数值实验,证明此算法比其他不可行算法具有更好的数值实验结果.

关键词　齐次不可行内点算法; 单调互补问题; 半定规划

中图分类号:O221.1　　**文献标志码**:A　　**doi**:10.7523/j.issn.2095-6134.2016.03.006

A homogeneous infeasible-interior-point algorithm for semidefinite programming

WU Yue[1], LIU Hongwei[1], XIE Di[2]

(1 *School of Mathematics and Statistics*, *Xidian University*, *Xi'an* 710126, *China*;
2 *School of Sciences*, *Lanzhou University of Technology*, *Lanzhou* 730050, *China*)

Abstract　We propose a homogeneous infeasible-interior-point algorithm for semidefinite programming(SDP) in a new wide neighborhood in order to achieve low iteration complexity and get better experiement numerical results. Complementarity problem (MCP) is the KKT condition of SDP. We sovle MCP by constructing a homogeneous MCP model (HMCP) and proposing a new wide neighborhood. Then we derive the optimal solution of SDP. This algorithm can be easily used to determine whether SDP is feasible or not. At the direction of NT, we prove that the iteration poin is convergent in new wide neighborhood and the iteration complexity is $O(\sqrt{n}\log L)$, where n is the dimension of SDP and $L = \mathrm{Tr}(\boldsymbol{X}^0 \boldsymbol{S}^0)/\varepsilon$ with ε being the required precision and $(\boldsymbol{X}^0,\boldsymbol{S}^0)$ the initial point. This algorithm has lower complexity degree than other algorithms for SDP. The numerical experiment is provided. We have proved that this algorithm is better than other infeasible-interior-

* 国家自然科学基金(61072144,61179040)和中央高校基本科研业务费专项基金(K50513100007)资助
† 通信作者,E-mail:982402513@qq.com

point algorithms in numerical experimentel results.

Key words homogeneous infeasible-starting interior-point algorithm; monotone complementarity problem; semidefinite programming

半定规划(SDP)的算法包括内点算法和非内点算法，从初始点是否可行的角度，内点算法分为可行算法和不可行算法. 它们之间存在这样一个矛盾：可行内点算法理论复杂度小，但是实验效果不好；不可行内点算法实验效果好，但是理论复杂度很大. 目前，求解半定规划问题的可行内点算法已经很成熟，所以，不可行内点算法的研究越来越广泛，目的是在较好的实验效果基础上降低其理论复杂度. 目前 SDP 不可行内点算法最好的迭代复杂度是 $O(n^{1.5}\log L)$[1]，其中 n 是 SDP 问题的维数，$L=\mathrm{Tr}(\boldsymbol{X}^0\boldsymbol{S}^0)/\varepsilon$，$\varepsilon$ 是需要的精度，$(\boldsymbol{X}^0,\boldsymbol{S}^0)$ 是迭代起始点，最好的实验结果已在文献[2]中给出. 直接的算法已经很难取得更好的复杂度和实验结果，本文采用一个 HMCP 模型作为一个间接桥梁，提出一个新的不可行内点算法，并且采用新的宽邻域，比较起其他算法，此算法可以将复杂度降低到 $O(\sqrt{n}\log L)$，并且实验效果比文献[2]中的实验结果更好，另外一个优势是可以判别原问题是否是可行问题. 所以，此算法在内点算法中是有效的.

Andersan 和 Ye[3] 研究线性规划的齐次算法，本文考虑半定规划的齐次算法.

考虑半定规划原问题和对偶问题的标准形式：

$$(\mathrm{P})\quad \begin{aligned}&\min \mathrm{Tr}(\boldsymbol{CX})\\ &\text{s.t. } \mathrm{Tr}(\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{X})=b_i,\ i=1,\cdots m,\\ &\qquad \boldsymbol{X}\geqslant 0,\end{aligned}$$

$$(\mathrm{D})\quad \begin{aligned}&\max \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}\\ &\text{s.t. } \sum_{i=1}^{m} y_i\boldsymbol{A}_i+\boldsymbol{S}=\boldsymbol{C},\\ &\qquad \boldsymbol{S}\geqslant 0.\end{aligned}$$

其最优性条件是一个单调互补问题(MCP)：

$$(\mathrm{MCP})\quad \begin{aligned}&\mathrm{Tr}(\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{X})=b_i,\boldsymbol{X}\geqslant 0,\ i=1,\cdots m,\\ &\sum_{i=1}^{m} y_i\boldsymbol{A}_i+\boldsymbol{S}=\boldsymbol{C},\ \boldsymbol{S}\geqslant 0,\\ &\boldsymbol{XS}=0.\end{aligned}$$

以上问题等价于互补问题：

$$(\mathrm{MCP})\quad \begin{aligned}&\min \mathrm{Tr}(\boldsymbol{XS})\\ &\text{s.t. } \mathrm{Tr}(\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{X})=b_i,\ \boldsymbol{X}\geqslant 0,\ i=1,\cdots m,\\ &\sum_{i=1}^{m} y_i\boldsymbol{A}_i+\boldsymbol{S}=\boldsymbol{C},\ \boldsymbol{S}\geqslant 0.\end{aligned}$$

令 $\boldsymbol{A}=(\mathrm{vec}(\boldsymbol{A}_1),\cdots,\mathrm{vec}(\boldsymbol{A}_m))^{\mathrm{T}}$,

$h(\boldsymbol{y},\mathrm{vec}(\boldsymbol{X}))=\boldsymbol{A}\mathrm{vec}(\boldsymbol{X})-\boldsymbol{b}$,

$g(\boldsymbol{y},\mathrm{vec}(\boldsymbol{X}))=\mathrm{vec}(\boldsymbol{C})-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$,

$$f(\boldsymbol{y},\mathrm{vec}(\boldsymbol{X}))=\begin{bmatrix}h(\boldsymbol{y},\mathrm{vec}(\boldsymbol{X}))\\ g(\boldsymbol{y},\mathrm{vec}(\boldsymbol{X}))\end{bmatrix}.$$

所以 $f(\boldsymbol{y},\mathrm{vec}(\boldsymbol{X}))$ 是从 $\Re^m\times S_+^n\to\Re^m\times\Re^{n^2}$ 的连续单调映射.

注：1) $\mathrm{vec}(\boldsymbol{M})$ 表示矩阵 $\boldsymbol{M}$ 的各列依次排列成的列向量；$\Re^m$ 表示 m 维欧式空间；S_+^n 表示 n 阶实对称半正定矩阵集；S^n 表示 n 阶实对称矩阵集.

2) 若 ∇f 是 f 的雅克比矩阵，则 ∇f 是半正定矩阵[4].

那么,问题 MCP 等价于矩阵形式：

$$\begin{aligned}&\min \mathrm{vec}(\boldsymbol{X})^{\mathrm{T}}\mathrm{vec}(\boldsymbol{S})\\ &\text{s.t. } \begin{bmatrix}\boldsymbol{0}\\ \mathrm{vec}(\boldsymbol{S})\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}\mathrm{vec}(\boldsymbol{X})-\boldsymbol{b}\\ \mathrm{vec}(\boldsymbol{C})-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}\end{bmatrix}=f(\boldsymbol{y},\mathrm{vec}(\boldsymbol{X})),\\ &\boldsymbol{S}\geqslant 0,\boldsymbol{X}\geqslant 0.\end{aligned}$$

本文将提出一个齐次模型，在新的宽邻域上来解决单调互补问题 MCP. 据分析，比较起其他 SDP 不可行内点算法此算法具有以下优势：

1) 使迭代复杂度降低到 $O(\sqrt{n}\log L)$.

2) 采用新的宽邻域，与其他 SDP 不可行算法相比，此算法具有较好的实验效果.

3) 判断原问题是否可行：如果问题 MCP 有解，那么算法将会求得原问题最优解；如果问题 MCP 无解，那么可以通过算法和齐次模型来证明.

本文中符号“$\otimes$”表示 2 个矩阵的克罗内克积，即若 $\boldsymbol{A}$ 是一个 $m\times n$ 阶的矩阵，$\boldsymbol{B}$ 是一个 $p\times q$ 阶的矩阵，则克罗内克积 $\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B}$ 是一个 $mp\times nq$ 的分块矩阵，表示为：

$$\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}a_{11}\boldsymbol{B} & \cdots & a_{1n}\boldsymbol{B}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{m1}\boldsymbol{B} & \cdots & a_{mn}\boldsymbol{B}\end{bmatrix}.$$

1　齐次 MCP 模型 HMCP

提出问题 MCP 的齐次模型(HMCP):

$$\text{(HMCP)}\quad \begin{aligned} &\min \mathrm{Tr}(\boldsymbol{XS}) + \tau\kappa \\ \text{s.t.}\ &\sum_{i=1}^{m} y_i \boldsymbol{A}_i + \boldsymbol{S} = \tau \boldsymbol{C},\ \boldsymbol{S} \geqslant 0,\ \tau \geqslant 0, \\ &\mathrm{Tr}(\boldsymbol{A}_i \boldsymbol{X}) = \tau b_i,\ \boldsymbol{X} \geqslant 0,\ i = 1,\cdots m, \\ &-\mathrm{Tr}(\boldsymbol{CX}) + \boldsymbol{b}^{\mathrm T}\boldsymbol{y} - \kappa = 0,\ \kappa \geqslant 0. \end{aligned}$$

类似于问题 MCP 等价形式的分析, 有

$$\tau f(\boldsymbol{y}/\tau, \mathrm{vec}(\boldsymbol{X})/\tau) = \begin{bmatrix} \tau h(\boldsymbol{y}/\tau, \mathrm{vec}(\boldsymbol{X})/\tau) \\ \tau g(\boldsymbol{y}/\tau, \mathrm{vec}(\boldsymbol{X})/\tau) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}\mathrm{vec}(\boldsymbol{X}) - \tau \boldsymbol{b} \\ \tau \mathrm{vec}(\boldsymbol{C}) - \boldsymbol{A}^{\mathrm T}\boldsymbol{y} \end{bmatrix};$$

$$\begin{aligned} -(\boldsymbol{y}, \mathrm{vec}(\boldsymbol{X}))f(\boldsymbol{y}/\tau, \mathrm{vec}(\boldsymbol{X})/\tau) &= -\boldsymbol{y}^{\mathrm T} h(\boldsymbol{y}/\tau, \mathrm{vec}(\boldsymbol{X})/\tau) - \mathrm{vec}(\boldsymbol{X})^{\mathrm T} g(\boldsymbol{y}/\tau, \mathrm{vec}(\boldsymbol{X})/\tau) \\ &= -\mathrm{vec}(\boldsymbol{C})^{\mathrm T}\mathrm{vec}(\boldsymbol{X}) + \boldsymbol{b}^{\mathrm T}\boldsymbol{y}, \end{aligned}$$

则问题 HMCP 等价于矩阵形式:

$$\begin{aligned} &\min \mathrm{vec}(\boldsymbol{X})^{\mathrm T}\mathrm{vec}(\boldsymbol{S}) + \tau\kappa \\ &\text{s.t.} \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} \\ \mathrm{vec}(\boldsymbol{S}) \\ \kappa \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau f(\boldsymbol{y}/\tau, \mathrm{vec}(\boldsymbol{X})/\tau) \\ -(\boldsymbol{y}, \mathrm{vec}(\boldsymbol{X}))f(\boldsymbol{y}/\tau, \mathrm{vec}(\boldsymbol{X})/\tau) \end{bmatrix} \\ &\qquad \boldsymbol{S} \geqslant 0, \tau \geqslant 0, \boldsymbol{X} \geqslant 0, \kappa \geqslant 0. \end{aligned}$$

定义

$$\psi(\boldsymbol{y}, \mathrm{vec}(\boldsymbol{X}), \tau) := \begin{bmatrix} \tau f(\boldsymbol{y}/\tau, \mathrm{vec}(\boldsymbol{X})/\tau) \\ -(\boldsymbol{y}, \mathrm{vec}(\boldsymbol{X}))f(\boldsymbol{y}/\tau, \mathrm{vec}(\boldsymbol{X})/\tau) \end{bmatrix}, \tag{1}$$

则 $(\boldsymbol{0}, \mathrm{vec}(\boldsymbol{S}), \kappa)^{\mathrm T} = \psi(\boldsymbol{y}, \mathrm{vec}(\boldsymbol{X}), \tau)$. 那么可以得到

$$\nabla\psi = \begin{bmatrix} \nabla f & f - \dfrac{1}{\tau}\ \nabla f \\ -f^{\mathrm T} - \dfrac{1}{\tau}(y, \mathrm{vec}(\boldsymbol{X}))\ \nabla f & \dfrac{1}{\tau}(y/\tau, \mathrm{vec}(\boldsymbol{X})/\tau)\ \nabla f \end{bmatrix}, \tag{2}$$

其中, f 和 ψ 分别是 $f(\boldsymbol{y}/\tau, \mathrm{vec}(\boldsymbol{X})/\tau)$ 和 $\psi(\boldsymbol{y}, \mathrm{vec}(\boldsymbol{X}), \tau)$ 的简写形式.

引理 1.1　定义 ψ 如(1)所示, 则如下结论成立:

(a) $(\boldsymbol{y}, \mathrm{vec}(\boldsymbol{X}), \tau)\psi(\boldsymbol{y}, \mathrm{vec}(\boldsymbol{X}), \tau) = 0$.

(b) $\nabla\psi(\boldsymbol{y}, \mathrm{vec}(\boldsymbol{X}), \tau)\ (\boldsymbol{y}, \mathrm{vec}(\boldsymbol{X}), \tau)^{\mathrm T} = \psi(\boldsymbol{y}, \mathrm{vec}(\boldsymbol{X}), \tau)$.

(c) $(\boldsymbol{y}, \mathrm{vec}(\boldsymbol{X}), \tau)\ \nabla\psi(\boldsymbol{y}, \mathrm{vec}(\boldsymbol{X}), \tau) = -\psi(\boldsymbol{y}, \mathrm{vec}(\boldsymbol{X}), \tau)^{\mathrm T}$.

(d) ∇f是定义在 $\Re^m \times \Re^{n^2}$ 上的半正定矩阵, $\nabla\psi$ 是定义在 $\Re^m \times \Re^{n^2} \times \Re$ 上的半正定矩阵.

证明　由 ψ 的定义和(2)易得(a), (b), (c).

因为 f 是从 $\Re^m \times S^n_+ \to \Re^m \times \Re^{n^2}$ 的连续单调映射, 所以 ∇f 是半正定矩阵[4]. 将下式展开可得:

$$\begin{aligned} &(\mathrm{d}\boldsymbol{y}, \mathrm{vec}(\mathrm{d}\boldsymbol{X}), \mathrm{d}\tau)\ \nabla\psi(\mathrm{d}\boldsymbol{y}, \mathrm{vec}(\mathrm{d}\boldsymbol{X}), \mathrm{d}\tau)\ (\mathrm{d}\boldsymbol{y}, \mathrm{vec}(\mathrm{d}\boldsymbol{X}), \mathrm{d}\tau)^{\mathrm T} \\ &= [(\mathrm{d}\boldsymbol{y}, \mathrm{vec}(\mathrm{d}\boldsymbol{X})) - \mathrm{d}\tau(\boldsymbol{y}, \mathrm{vec}(\boldsymbol{X}))/\tau] \cdot \nabla f [(\mathrm{d}\boldsymbol{y}, \mathrm{vec}(\mathrm{d}\boldsymbol{X})) - \mathrm{d}\tau(\boldsymbol{y}, \mathrm{vec}(\boldsymbol{X}))/\tau]^{\mathrm T} \\ &\geqslant 0 \end{aligned}$$

则 $\nabla\psi$ 是半正定矩阵. (d)得证. □

定理 1.1

(a) 若 f 是从 $\Re^{m+n^2}$ 到 $\Re^{m+n^2}$ 的连续单调映射, 则 ψ 是从 $\Re^{m+n^2+1}$ 到 $\Re^{m+n^2+1}$ 的连续单调映射.

(b) 问题 HMCP 是渐进可行的, 并且每一个渐进可行点是一个渐进互补解.

(c) 设问题 HMCP 的极大互补解是 $(\mathrm{vec}(\boldsymbol{X}^*), \boldsymbol{y}^*, \mathrm{vec}(\boldsymbol{S}^*), \tau^*, \kappa^*)$, 问题 MCP 有最优解当且仅当 $\tau^* > 0$ 成立, 这时, $(\mathrm{vec}(\boldsymbol{X}^*)/\tau^*, \boldsymbol{y}^*/\tau^*, \mathrm{vec}(\boldsymbol{S}^*)/\tau^*)$ 是问题 MCP 的一个互补解.

(d) 当 $\kappa^* > 0$ 时, 问题 MCP 是强不可行的.

证明

(a) 任取 $(\boldsymbol{y}_1, \mathrm{vec}(\boldsymbol{X}_1), \tau_1)$, $(\boldsymbol{y}_2, \mathrm{vec}(\boldsymbol{X}_2), \tau_2) \in \Re^{m+n^2+1}$, 因为 $(\boldsymbol{y}_1/\tau_1, \mathrm{vec}(\boldsymbol{X}_1)/\tau_1)$, $(\boldsymbol{y}_2/\tau_2, \mathrm{vec}(\boldsymbol{X}_2)/\tau_2) \in \Re^{m+n^2}$, 由引理 1.1 得

$$\begin{aligned} &(\boldsymbol{y}_1 - \boldsymbol{y}_2, \mathrm{vec}(\boldsymbol{X}_1) - \mathrm{vec}(\boldsymbol{X}_2), \tau_1 - \tau_2) \cdot (\psi(\boldsymbol{y}_1, \mathrm{vec}(\boldsymbol{X}_1), \tau_1) - \psi(\boldsymbol{y}_2, \mathrm{vec}(\boldsymbol{X}_2), \tau_2)) \\ &= \tau_1\tau_2((\boldsymbol{y}_1/\tau_1, \mathrm{vec}(\boldsymbol{X}_1)/\tau_1) - (\boldsymbol{y}_2/\tau_2, \mathrm{vec}(\boldsymbol{X}_2)/\tau_2))^{\mathrm T} \cdot (f(\boldsymbol{y}_1/\tau_1, \mathrm{vec}(\boldsymbol{X}_1)/\tau_1) - f(\boldsymbol{y}_2/\tau_2, \mathrm{vec}(\boldsymbol{X}_2)/\tau_2)) \\ &\geqslant 0. \end{aligned}$$

则 ψ 也为单调映射.

(b) 取 $\mathrm{vec}(\boldsymbol{X})^t = (1/2)^t \boldsymbol{e}_1 (\boldsymbol{X} \geqslant 0)$, $\boldsymbol{y}^t = (1/2)^t \boldsymbol{e}_2$, $\tau^t = (1/2)^t \geqslant 0$, $\kappa^t = (1/2)^t \geqslant 0$, $\mathrm{vec}(\boldsymbol{S})^t = (1/2)^t \boldsymbol{e}_1 (\boldsymbol{S} \geqslant 0)$.

其中 $\boldsymbol{e}_1$ 为每个元素全为 1 的 n^2 维列向量, $\boldsymbol{e}_2$ 为每个元素全为 1 的 m 维列向量, 当 $t \to \infty$ 时, 有

$$\boldsymbol{A}\mathrm{vec}(\boldsymbol{X})^t - \tau^t \boldsymbol{b} = (1/2)^t (\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{b}) \to \boldsymbol{0},$$

$$\mathrm{vec}(\boldsymbol{S})^t - \tau^t \mathrm{vec}(\boldsymbol{C}) + \boldsymbol{A}^{\mathrm T}\boldsymbol{y}^t = (1/2)^t \cdot$$

$$[\boldsymbol{e}_1 - \mathrm{vec}(\boldsymbol{C}) + \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{e}_2] \to \boldsymbol{0},$$
$$\kappa^t + \mathrm{vec}(\boldsymbol{C})^{\mathrm{T}}\mathrm{vec}(\boldsymbol{X})^{\mathrm{T}} - \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}^t = (1/2)^t \cdot [1 + \mathrm{vec}(\boldsymbol{C})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{e}_2] \to 0,$$

则所取数列是渐进可行的，假设 $(\mathrm{vec}(\tilde{\boldsymbol{X}})(\tilde{\boldsymbol{X}} \geq 0), \mathrm{vec}(\tilde{\boldsymbol{S}})(\tilde{\boldsymbol{S}} \geq 0), \tilde{\boldsymbol{y}}, \tilde{\tau} \geqslant 0, \tilde{\kappa} \geqslant 0)$ 是问题 HMCP 的任意渐进可行点，由引理 1.1 以及 $(\boldsymbol{0}, \mathrm{vec}(\boldsymbol{S}), \kappa)^{\mathrm{T}} = \psi(\boldsymbol{y}, \mathrm{vec}(\boldsymbol{X}), \tau)$ 知，

$$\begin{aligned}&\mathrm{vec}(\tilde{\boldsymbol{S}})^{\mathrm{T}}\mathrm{vec}(\tilde{\boldsymbol{X}}) + \tilde{\tau}\tilde{\kappa} = (\tilde{\boldsymbol{y}}, \mathrm{vec}(\tilde{\boldsymbol{X}}), \tilde{\tau})(\boldsymbol{0}, \mathrm{vec}(\tilde{\boldsymbol{S}}), \tilde{\kappa})^{\mathrm{T}}\\&= (\tilde{\boldsymbol{y}}, \mathrm{vec}(\tilde{\boldsymbol{X}}), \tilde{\tau})\psi(\tilde{\boldsymbol{y}}, \mathrm{vec}(\tilde{\boldsymbol{X}}), \tilde{\tau})\\&= 0,\end{aligned}$$

即渐进可行点 $(\mathrm{vec}(\tilde{\boldsymbol{X}}); \tilde{\boldsymbol{y}}; \mathrm{vec}(\tilde{\boldsymbol{S}}); \tilde{\tau}; \tilde{\kappa})$ 是一个渐进互补解.

(c) “$\Leftarrow$” 若 $\tau^* > 0$，因为 $(\mathrm{vec}(\boldsymbol{X}^*), \boldsymbol{y}^*, \mathrm{vec}(\boldsymbol{S}^*), \tau^*, \kappa^*)$ 是问题 HMCP 的极大互补解，则

$$\mathrm{vec}(\boldsymbol{S}^*) = \tau^* g(\boldsymbol{y}^*/\tau^*, \mathrm{vec}(\boldsymbol{X}^*)/\tau^*),$$
$$\mathrm{vec}(\boldsymbol{X}^*)^{\mathrm{T}}\mathrm{vec}(\boldsymbol{S}^*) = 0,$$
$$h(\boldsymbol{y}^*/\tau^*, \mathrm{vec}(\boldsymbol{X}^*)/\tau^*) = \boldsymbol{0}, \tag{3}$$

所以，
$$\mathrm{vec}(\boldsymbol{S}^*)/\tau^* = g(\boldsymbol{y}^*/\tau^*, \mathrm{vec}(\boldsymbol{X}^*)/\tau^*), \tag{4}$$
$$\mathrm{vec}(\boldsymbol{X}^*)^{\mathrm{T}}\mathrm{vec}(\boldsymbol{S}^*)/(\tau^*)^2 = 0, \tag{5}$$

由(3)，(4)，(5)得 $(\mathrm{vec}(\boldsymbol{X}^*)/\tau^*, \boldsymbol{y}^*/\tau^*, \mathrm{vec}(\boldsymbol{S}^*)/\tau^*)$ 是问题 MCP 的一个最优互补解.

“$\Rightarrow$”假设问题 MCP 的一个解为 $(\mathrm{vec}(\tilde{\boldsymbol{X}}), \tilde{\boldsymbol{y}}, \mathrm{vec}(\tilde{\boldsymbol{S}}))$，则可以找到 $\tau = 1, \mathrm{vec}(\boldsymbol{X}) = \mathrm{vec}(\tilde{\boldsymbol{X}}), \mathrm{vec}(\boldsymbol{S}) = \mathrm{vec}(\tilde{\boldsymbol{S}}), \kappa = 0, \boldsymbol{y} = \tilde{\boldsymbol{y}}$ 是问题 HMCP 的解.

又 τ^* 是问题 HMCP 的一个极大互补解，且 $\tau^* \geqslant 0$，则问题 HMCP 的每一个极大互补解中有 $\tau^* > 0$（否则，$\tau \equiv 0$，矛盾）.

(d) 因为 $(\mathrm{vec}(\boldsymbol{X}^*); \boldsymbol{y}^*; \mathrm{vec}(\boldsymbol{S}^*); \tau^*; \kappa^*)$ 是问题 HMCP 的极大互补解，则

$$\mathrm{Tr}(\boldsymbol{X}^*\boldsymbol{S}^*) + \tau^*\kappa^* = 0, \tag{6}$$
$$\boldsymbol{A}\mathrm{vec}(\boldsymbol{X}^*) - \tau^*\boldsymbol{b} = 0, \tag{7}$$
$$\tau^*\mathrm{vec}(\boldsymbol{C}) - \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}^* = \mathrm{vec}(\boldsymbol{S}^*), \tag{8}$$
$$-\mathrm{Tr}(\boldsymbol{C}\boldsymbol{X}^*) + \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}^* = \kappa^*, \tag{9}$$

因为 $\kappa^* > 0$，则 $\tau^* = 0$. 由式(7)—式(9)得

$$\boldsymbol{A}\mathrm{vec}(\boldsymbol{X}^*) = 0, \tag{10}$$
$$-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}^* = \mathrm{vec}(\boldsymbol{S}^*), \tag{11}$$
$$\mathrm{Tr}(\boldsymbol{C}\boldsymbol{X}^*) - \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}^* < 0, \tag{12}$$

由式(12)得，$\mathrm{Tr}(\boldsymbol{C}\boldsymbol{X}^*) < 0$ 和 $\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}^* > 0$ 至少有一个成立.

当 $\mathrm{Tr}(\boldsymbol{C}\boldsymbol{X}^*) < 0$ 成立时，由式(10)得，(P)有改良射线，则(D)强不可行，MCP 强不可行.

当 $\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}^* > 0$ 成立时，由式(11)得，(D)有改良射线，则(P)强不可行，MCP 强不可行. 证毕.

2 齐次模型的中心路径

由定理 1.1 知，通过找问题 HMCP 的一个极大互补解来解问题 MCP. 为了方便，取起始点 $\boldsymbol{X}^0 = \boldsymbol{I}, \boldsymbol{S}^0 = \boldsymbol{I}, \tau^0 = 1, \kappa^0 = 1, \boldsymbol{y}^0 = \boldsymbol{0}$，则 $\boldsymbol{X}^0\boldsymbol{S}^0 = \boldsymbol{I}$，$\tau^0\kappa^0 = 1$.

定义集合和差向量：

$$H_{++} = S_{++}^n \times S_{++}^n \times \Re_{++} \times \Re_{++} \times \Re^m,$$
$$\boldsymbol{R}_D := -\tau\boldsymbol{C} + \sum_{i=1}^m \boldsymbol{A}_i^{\mathrm{T}} y_i + \boldsymbol{S},$$
$$\boldsymbol{R}_P := \tau b - A\mathrm{vec}(\boldsymbol{X}),$$
$$\boldsymbol{R}_G := \mathrm{vec}(\boldsymbol{C})^{\mathrm{T}}\mathrm{vec}(\boldsymbol{X}) - \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} + \kappa.$$

那么，可以定义齐次模型 HMCP 的不可行中心路径为：

$$C(\mu) := \left\{(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{S}, \tau, \kappa, \boldsymbol{y}) \in \mathscr{H}_{++} : \begin{bmatrix}\boldsymbol{XS} & \boldsymbol{0}\\ 0 & \tau\kappa\end{bmatrix} = \theta\boldsymbol{I}, \begin{bmatrix}\boldsymbol{R}_P\\ \boldsymbol{R}_D\\ \boldsymbol{R}_G\end{bmatrix} = \theta\begin{bmatrix}\boldsymbol{R}_P^0\\ \boldsymbol{R}_D^0\\ \boldsymbol{R}_G^0\end{bmatrix}, \mu > 0, 0 < \theta \leqslant 1\right\} \tag{13}$$

表示为 $(\boldsymbol{X}(\theta), \boldsymbol{S}(\theta), \tau(\theta), \kappa(\theta), \boldsymbol{y}(\theta))$.

定理 2.1

(a) 对任意的 $0 < \theta \leqslant 1$，$\begin{bmatrix}\boldsymbol{R}_P\\ \mathrm{vec}(\boldsymbol{R}_D)\\ \boldsymbol{R}_G\end{bmatrix} = \theta\begin{bmatrix}\boldsymbol{R}_P^0\\ \mathrm{vec}(\boldsymbol{R}_D^0)\\ \boldsymbol{R}_G^0\end{bmatrix}$ 存在一个严格正定点.

(b) 若起始点为($\boldsymbol{X}^0 = \boldsymbol{I}, \boldsymbol{S}^0 = \boldsymbol{I}, \tau^0 = 1, \kappa^0 = 1, \boldsymbol{y}^0 = 0$)，则对任意的 $0 < \theta \leqslant 1$，中心路径(13)的解是存在唯一的.

(c) 中心路径是一条有界轨迹.

(d) $\theta \to 0$ 时，存在唯一极限点 $(\boldsymbol{X}(0), \boldsymbol{S}(0), \tau(0), \kappa(0), \boldsymbol{y}(0))$ 是问题 HCMP 的一个

极大互补解.

证明

(a) $\boldsymbol{R}_D^0 = -\tau^0\boldsymbol{C} + \sum_{i=1}^{m}\boldsymbol{A}_i{}^{\mathrm{T}}y_i^0 + \boldsymbol{S}^0$,

$\boldsymbol{R}_P^0 = \tau\boldsymbol{b} - \boldsymbol{A}\mathrm{vec}(\boldsymbol{X}^0)$,

$\boldsymbol{R}_G^0 = \mathrm{vec}(\boldsymbol{C})^{\mathrm{T}}\mathrm{vec}(\boldsymbol{X}^0) - \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}^0 + \kappa^0$.

令 $\mathscr{T}_{++} := \left\{\begin{bmatrix}\boldsymbol{0}\\ \mathrm{vec}(\boldsymbol{S})\\ \kappa\end{bmatrix} - \psi(\boldsymbol{y},\mathrm{vec}(\boldsymbol{X}),\tau):\right.$

$\left.\boldsymbol{X}>0,\boldsymbol{S}>0,\tau>0,\kappa>0\right\}$, 可证明, $\mathscr{T}_{++}$ 是一个开凸集[5-6], 则 $(\boldsymbol{R}_P^0;\mathrm{vec}(\boldsymbol{R}_D^0);\boldsymbol{R}_G^0) \in \mathscr{T}_{++}$, 又 HMCP 是渐进可行的, 则 $\boldsymbol{0} \in \mathscr{T}_{++}$, 所以, 对 $0 < \theta \leqslant 1$, 有 $\theta(\boldsymbol{R}_P^0;\mathrm{vec}(\boldsymbol{R}_D^0);\boldsymbol{R}_G^0) \in \mathscr{T}_{++}$.

(b) $\begin{bmatrix}\boldsymbol{R}_P\\ \boldsymbol{R}_D\\ \boldsymbol{R}_G\end{bmatrix} = \theta\begin{bmatrix}\boldsymbol{R}_P^0\\ \boldsymbol{R}_D^0\\ \boldsymbol{R}_G^0\end{bmatrix}$ 展开后有如下形式:

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{0}\\ \mathrm{vec}(\boldsymbol{S})\\ \kappa\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{0} & \boldsymbol{A} & -\boldsymbol{b}\\ -\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{0} & \mathrm{vec}(\boldsymbol{C})\\ \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}} & -\mathrm{vec}(\boldsymbol{C})^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{0}\end{bmatrix}\cdot$$

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{y}\\ \mathrm{vec}(\boldsymbol{X})\\ \tau\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\theta\boldsymbol{R}_P^0\\ \theta\mathrm{vec}(\boldsymbol{R}_D^0)\\ \theta\boldsymbol{R}_G^0\end{bmatrix},$$

则中心路径是线性互补问题的中心路径, 文献[7]已证明线性互补问题的中心路径是存在唯一的.

(c) 为了方便, 我们令 $\boldsymbol{a} = (\boldsymbol{y};\mathrm{vec}(\boldsymbol{X});\tau)$, $\boldsymbol{b} = (\boldsymbol{0};\mathrm{vec}(\boldsymbol{S});\kappa)$, $\boldsymbol{r} = (\boldsymbol{R}_p;\mathrm{vec}(\boldsymbol{R}_D);\boldsymbol{R}_G)$. 则有 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{b} - \psi(\boldsymbol{a}) = \theta\boldsymbol{r}^0$, $\boldsymbol{r}^0 = \boldsymbol{b}^0 - \psi(\boldsymbol{a}^0)$.

因为 ψ 单调, 则 $(\boldsymbol{a}^0-\boldsymbol{a})^{\mathrm{T}}(\psi(\boldsymbol{a}^0) - \psi(\boldsymbol{a})) \geqslant 0$, 又 $\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\psi(\boldsymbol{a}) = 0$, $(\boldsymbol{a}^0)^{\mathrm{T}}\psi(\boldsymbol{a}^0) = 0$, 则 $-(\boldsymbol{a}^0)^{\mathrm{T}}\psi(\boldsymbol{a}) - \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\psi(\boldsymbol{a}^0) \geqslant 0$. 所以有如下不等式:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{r}^0 &= \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}^0 - \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\psi(\boldsymbol{a}^0)\\ &= \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}^0 + \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}^0 - \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}^0 - \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\psi(\boldsymbol{a}^0)\\ &= \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}^0 + \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}^0 - (\boldsymbol{a}^0)^{\mathrm{T}}\cdot\\ &\quad(\theta\boldsymbol{r}^0 + \psi(\boldsymbol{a})) - \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\psi(\boldsymbol{a}^0)\\ &= \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}^0 + \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}^0 - \theta(\boldsymbol{a}^0)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{r}^0 -\\ &\quad(\boldsymbol{a}^0)^{\mathrm{T}}\psi(\boldsymbol{a}) - \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\psi(\boldsymbol{a}^0)\\ &\geqslant \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}^0 + \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}^0 - \theta(\boldsymbol{a}^0)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{r}^0\\ &= \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}^0 + \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}^0 - \theta(\boldsymbol{a}^0)^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{b}^0 - \psi(\boldsymbol{a}^0))\\ &= \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}^0 + \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}^0 - \theta(\boldsymbol{a}^0)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}^0,\end{aligned}$$

又对任意的 $0 < \theta \leqslant 1$, 有

$$\begin{aligned}\theta\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{r}^0 &= \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{b} - \psi(\boldsymbol{a})) = \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}\\ &= \theta(n+1) = \theta(\boldsymbol{a}^0)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}^0.\end{aligned}$$

从以上两式可以得到,

$$\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}^0 + \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}^0 \leqslant (1+\theta)(\boldsymbol{a}^0)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}^0,$$

即

$(\boldsymbol{y};\mathrm{vec}(\boldsymbol{X});\tau)^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{0};\mathrm{vec}(\boldsymbol{S}^0);\kappa^0) + (\boldsymbol{0};\mathrm{vec}(\boldsymbol{S});\kappa)^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{y}^0;\mathrm{vec}(\boldsymbol{X}^0);\tau^0) \leqslant (1+\theta)(\boldsymbol{y}^0;\mathrm{vec}(\boldsymbol{X}^0);\tau^0)^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{0};\mathrm{vec}(\boldsymbol{S}^0);\kappa^0)$

则 $(\boldsymbol{X},\boldsymbol{S},\boldsymbol{y},\tau,\kappa)$ 有界, 即中心路径有界.

(d) 为方便, 记 $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{X} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \tau\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{S} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \kappa\end{bmatrix}$, 则中心路径(13)中有 $\boldsymbol{BC} = \theta\boldsymbol{I}$, 根据文献[8]可得中心路径存在唯一极限点 $(\boldsymbol{X}(0),\boldsymbol{S}(0),\tau(0),\kappa(0),\boldsymbol{y}(0))$, 并且是最优解, 进而可以证明 $(\boldsymbol{X}(0),\boldsymbol{S}(0),\tau(0),\kappa(0),\boldsymbol{y}(0))$ 是问题 HCMP 的一个极大互补解. □

3　具有 $O(\sqrt{n}\log L)$ 复杂性的齐次不可行算法

下面用齐次不可行内点算法计算在中心路径附近产生的迭代点.

3.1　计算搜索方向

对单调互补问题 MCP 采用牛顿法,可得以下线性方程组:

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{0} & \mathrm{vec}(\boldsymbol{C}) & -\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\\ -\mathrm{vec}(\boldsymbol{C})^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{A} & -\boldsymbol{b} & \boldsymbol{0}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathrm{vec}(\mathrm{d}\boldsymbol{X})\\ \mathrm{d}\tau\\ \mathrm{d}\boldsymbol{y}\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}\mathrm{vec}(\mathrm{d}\boldsymbol{S})\\ \mathrm{d}\kappa\\ 0\end{bmatrix} = \eta\begin{bmatrix}\mathrm{vec}(\boldsymbol{R}_D^k)\\ \boldsymbol{R}_G^k\\ \boldsymbol{R}_P^k\end{bmatrix} \tag{14a}$$

和

$$\boldsymbol{X}^k\mathrm{d}\boldsymbol{S} + \mathrm{d}\boldsymbol{X}\,\boldsymbol{S}^k = \gamma\mu^k\boldsymbol{I} - \boldsymbol{X}^k\boldsymbol{S}^k \tag{14b}$$

$$\kappa^k\mathrm{d}\tau + \tau^k\mathrm{d}\kappa = \gamma\mu^k - \tau^k\kappa^k \tag{14c}$$

其中, $\mu^k = (\mathrm{Tr}(\boldsymbol{X}^k\boldsymbol{S}^k) + \tau^k\kappa^k)/(n+1)$, $\eta \in (0,1)$, $\gamma \in (0,1)$.

从式(14)中能得到对称的 $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$, 但是不能保证得到对称的 $\mathrm{d}\boldsymbol{X}$, 为了得到对称的 $\mathrm{d}\boldsymbol{X}$, 使用 Zhang[9] 提出的方法, 将(14b)替换为

$$H_P(\boldsymbol{X}^k\mathrm{d}\boldsymbol{S} + \mathrm{d}\boldsymbol{X}\,\boldsymbol{S}^k) = H_P(\gamma\mu^k\boldsymbol{I} - \boldsymbol{X}^k\boldsymbol{S}^k). \tag{14b1}$$

其中, $H(\cdot)$ 是一个对称线性变换, 定义如下:

$$H_P(\boldsymbol{M}) = \frac{1}{2}[\boldsymbol{P}\boldsymbol{M}\boldsymbol{P}^{-1} + \boldsymbol{P}^{-\mathrm{T}}\boldsymbol{M}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}], \forall \boldsymbol{M} \in \Re^{n\times n}.$$

$\boldsymbol{P}$ 是给定的非奇异矩阵，称为尺度矩阵，本文取 $\boldsymbol{P} \in \mathscr{P}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{S})$，$\mathscr{P}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{S}) := \{\boldsymbol{P} \in S_{++}^n : \boldsymbol{PXSP}^{-1} \in S^n\}$.

在文献[9]中 Zhang 证明了若 $\boldsymbol{P}$ 是一个非奇异矩阵，则

$$H_P(\boldsymbol{M}) = \gamma\mu^k\boldsymbol{I} \Leftrightarrow \boldsymbol{M} = \gamma\mu^k\boldsymbol{I},$$

则(14b1)等价于

$$H_P(\boldsymbol{X}^k\mathrm{d}\boldsymbol{S} + \mathrm{d}\boldsymbol{X}\boldsymbol{S}^k) = \gamma\mu^k\boldsymbol{I} - H_P(\boldsymbol{X}^k\boldsymbol{S}^k). \tag{14b2}$$

文献[10]已证明，由(14a)，(14b2)，(14c)得到的方向 $\mathrm{d}\boldsymbol{X},\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 为对称方向，且是存在唯一的.

定义 $(\boldsymbol{X}^k > 0, \boldsymbol{y}^k, \boldsymbol{S}^k > 0, \tau^k > 0, \kappa^k > 0)$ 是当前第 k 个迭代点，并且第 $k+1$ 个迭代点为

$$(\boldsymbol{X}^{k+1}, \boldsymbol{y}^{k+1}, \boldsymbol{S}^{k+1}, \tau^{k+1}, \kappa^{k+1}) = (\boldsymbol{X}^k, \boldsymbol{y}^k, \boldsymbol{S}^k, \tau^k, \kappa^k) + \alpha(\mathrm{d}\boldsymbol{X}, \mathrm{d}\boldsymbol{y}, \mathrm{d}\boldsymbol{S}, \mathrm{d}\tau, \mathrm{d}\kappa).$$

其中，α 是搜索步长，$(\mathrm{d}\boldsymbol{X}, \mathrm{d}\tau, \mathrm{d}\boldsymbol{y}, \mathrm{d}\boldsymbol{S}, \mathrm{d}\kappa)$ 为搜索方向.

引用文献[15]给出的矩阵以及向量正部和负部的概念，本文采用如下系统计算搜索方向 $(\mathrm{d}\boldsymbol{X}, \mathrm{d}\tau, \mathrm{d}\boldsymbol{y}, \mathrm{d}\boldsymbol{S}, \mathrm{d}\kappa)$：

$$\begin{bmatrix} 0 & \mathrm{vec}(\boldsymbol{C}) & -\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} \\ -\mathrm{vec}(\boldsymbol{C})^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{A} & -\boldsymbol{b} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathrm{vec}(\mathrm{d}\boldsymbol{X}) \\ \mathrm{d}\tau \\ \mathrm{d}\boldsymbol{y} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathrm{vec}(\mathrm{d}\boldsymbol{S}) \\ \mathrm{d}\kappa \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix} = \eta\begin{bmatrix} \mathrm{vec}(\boldsymbol{R}_D^k) \\ \boldsymbol{R}_G^k \\ \boldsymbol{R}_P^k \end{bmatrix}, \tag{15a}$$

$$H_P(\boldsymbol{X}^k\mathrm{d}\boldsymbol{S} + \mathrm{d}\boldsymbol{X}\boldsymbol{S}^k) = [\gamma\mu^k\boldsymbol{I} - H_P(\boldsymbol{X}^k\boldsymbol{S}^k)]^- + \sqrt{n+1}[\gamma\mu^k\boldsymbol{I} - H_P(\boldsymbol{X}^k\boldsymbol{S}^k)]^+, \tag{15b}$$

$$\kappa^k\mathrm{d}\tau + \tau^k\mathrm{d}\kappa = [\gamma\mu^k - \tau^k\kappa^k]^- + \sqrt{n+1}\cdot[\gamma\mu^k - \tau^k\kappa^k]^+. \tag{15c}$$

其中，$\mu^k = (\mathrm{Tr}(\boldsymbol{X}^k\boldsymbol{S}^k) + \tau^k\kappa^k)/(n+1)$，$\eta \in (0,1)$，$\gamma \in (0,1)$.

下面用克罗内克积的形式等价表示(15b)：

$$\begin{aligned}(15\mathrm{b}) \Leftrightarrow\ & [\boldsymbol{P}(\boldsymbol{X}^k\mathrm{d}\boldsymbol{S} + \mathrm{d}\boldsymbol{X}\boldsymbol{S}^k)\boldsymbol{P}^{-1} + \\ & \boldsymbol{P}^{-\mathrm{T}}(\boldsymbol{S}^k\mathrm{d}\boldsymbol{X} + \mathrm{d}\boldsymbol{S}\boldsymbol{X}^k)\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}]/2 \\ & = [\gamma\mu^k\boldsymbol{I} - H_P(\boldsymbol{X}^k\boldsymbol{S}^k)]^- + \\ & \sqrt{n+1}[\gamma\mu^k\boldsymbol{I} - H_P(\boldsymbol{X}^k\boldsymbol{S}^k)]^+ \\ \Leftrightarrow\ & \boldsymbol{E}^k\mathrm{vec}(\mathrm{d}\boldsymbol{X}) + \boldsymbol{F}^k\mathrm{vec}(\mathrm{d}\boldsymbol{S}) = \mathrm{vec}(\boldsymbol{R}_C^k),\end{aligned} \tag{15b1}$$

其中，

$$\boldsymbol{E} := (\boldsymbol{P}^{-\mathrm{T}}\boldsymbol{S} \otimes \boldsymbol{P} + \boldsymbol{P} \otimes \boldsymbol{P}^{-\mathrm{T}}\boldsymbol{S})/2,$$

$$\boldsymbol{F} := (\boldsymbol{PX} \otimes \boldsymbol{P}^{-\mathrm{T}} + \boldsymbol{P}^{-\mathrm{T}} \otimes \boldsymbol{PX})/2,$$

$$\boldsymbol{R}_C^k := [\gamma\mu^k\boldsymbol{I} - H_P(\boldsymbol{X}^k\boldsymbol{S}^k)]^- + \sqrt{n+1}[\gamma\mu^k\boldsymbol{I} - H_P(\boldsymbol{X}^k\boldsymbol{S}^k)]^+.$$

因为本文取 $\boldsymbol{P} \in \mathscr{P}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{S})$，文献[17]已证明 $\boldsymbol{E}^k$，$\boldsymbol{F}^k$ 为半正定矩阵(不一定对称).与系统(14)相同，可以证明系统(15)的解也是存在唯一的.

下面求解由系统(15a)，(15b1)，(15c)得到的迭代搜索方向 $(\mathrm{d}\boldsymbol{X}, \mathrm{d}\boldsymbol{y}, \mathrm{d}\boldsymbol{S}, \mathrm{d}\tau, \mathrm{d}\kappa)$.

由(15b1)得，

$$\mathrm{vec}(\mathrm{d}\boldsymbol{S}) = (\boldsymbol{F}^k)^{-1}[\mathrm{vec}(\boldsymbol{R}_C^k) - \boldsymbol{E}^k\mathrm{vec}(\mathrm{d}\boldsymbol{X})], \tag{16}$$

由(15c)得，

$$\mathrm{d}\kappa = (\tau^k)^{-1}(r_C{}^k - \kappa^k\mathrm{d}\tau), \tag{17}$$

其中，$r_C{}^k = [\gamma\mu^k - \tau^k\kappa^k]^- + \sqrt{n+1}[\gamma\mu^k - \tau^k\kappa^k]^+$.

将式(16)、式(17)代入式(15a)减少牛顿方程，得牛顿搜索方向 $(\mathrm{d}\boldsymbol{X}, \mathrm{d}\boldsymbol{y}, \mathrm{d}\boldsymbol{S}, \mathrm{d}\tau, \mathrm{d}\kappa)$ 为如下系统的解：

$$\begin{bmatrix} (\boldsymbol{F}^k)^{-1}\boldsymbol{E}^k & \mathrm{vec}(\boldsymbol{C}) & -\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} \\ -\mathrm{vec}(\boldsymbol{C})^{\mathrm{T}} & (\tau^k)^{-1}\kappa^k & \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{A} & -\boldsymbol{b} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathrm{vec}(\mathrm{d}\boldsymbol{X}) \\ \mathrm{d}\tau \\ \mathrm{d}\boldsymbol{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \eta\mathrm{vec}(\boldsymbol{R}_D^k) + (\boldsymbol{F}^k)^{-1}\mathrm{vec}(\boldsymbol{R}_C^k) \\ \eta\boldsymbol{R}_G^k + (\tau^k)^{-1}r_C{}^k \\ \eta\boldsymbol{R}_P^k \end{bmatrix}. \tag{18}$$

令 $\boldsymbol{K} := \begin{bmatrix} (\boldsymbol{F}^k)^{-1}\boldsymbol{E}^k & -\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{A} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix}$，其中 $\boldsymbol{A}$ 是 $m \times n^2$ 阶矩阵，$\boldsymbol{E}^k$ 和 $\boldsymbol{F}^k$ 均是 n^2 阶方阵，则 $\boldsymbol{K}$ 是 $m+n^2$ 阶方阵.

引理 3.1 若 $\boldsymbol{K}$ 有如上定义，则

$$\boldsymbol{K}^{-1} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{Q}^{-1} - \boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}^{-1} & \boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1} \\ -(\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}^{-1} & (\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1} \end{bmatrix},$$

其中，$\boldsymbol{Q} = (\boldsymbol{F}^k)^{-1}\boldsymbol{E}^k$.

证明 易验证 $\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{K} = \boldsymbol{K}\boldsymbol{K}^{-1} = \boldsymbol{I}_{m+n^2}$. □

由上述可知，牛顿搜索方向(18)等价于

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{K} & (\mathrm{vec}(\boldsymbol{C});-\boldsymbol{b}) \\ (-\mathrm{vec}(\boldsymbol{C});\boldsymbol{b})^{\mathrm{T}} & (\tau^k)^{-1}\kappa^k \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} (\mathrm{vec}(\mathrm{d}\boldsymbol{X});\mathrm{d}\boldsymbol{y}) \\ \mathrm{d}\tau \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{r}} \\ \eta(\boldsymbol{R}_G^k) + (\tau^k)^{-1}r_C{}^k \end{bmatrix}, \tag{19}$$

其中，$\tilde{\boldsymbol{r}} := \begin{bmatrix} \eta\mathrm{vec}(\boldsymbol{R}_D^k) + (\boldsymbol{F}^k)^{-1}\mathrm{vec}(\boldsymbol{R}_C^k) \\ \eta\boldsymbol{R}_P^k \end{bmatrix}$.

定义 $\boldsymbol{p}$ 和 $\boldsymbol{q}$ 是如下线性系统的解:

$$\boldsymbol{K}\boldsymbol{p} = (\mathrm{vec}(\boldsymbol{C});-\boldsymbol{b});\ \boldsymbol{K}\boldsymbol{q} = \tilde{\boldsymbol{r}}.$$

由式(19)知,

(第二行)

$$(\tau^k)^{-1}\kappa^k\mathrm{d}\tau + (-\mathrm{vec}(\boldsymbol{C});\boldsymbol{b})^{\mathrm{T}}(\mathrm{vec}(\mathrm{d}\boldsymbol{X});\mathrm{d}\boldsymbol{y}) = \eta(\boldsymbol{R}_G^k) + (\tau^k)^{-1}r_C{}^k, \tag{20}$$

(第一行)

$$\boldsymbol{K}(\mathrm{vec}(\mathrm{d}\boldsymbol{X});\mathrm{d}\boldsymbol{y}) + (\mathrm{vec}(\boldsymbol{C});-\boldsymbol{b})\mathrm{d}\tau = \tilde{\boldsymbol{r}},$$

即　$\boldsymbol{K}(\mathrm{vec}(\mathrm{d}\boldsymbol{X});\mathrm{d}\boldsymbol{y}) + \boldsymbol{K}\boldsymbol{p}\mathrm{d}\tau = \boldsymbol{K}\boldsymbol{q}.$

又由引理 3.1 知, $\boldsymbol{K}$ 是非奇异矩阵, 则

$$(\mathrm{vec}(\mathrm{d}\boldsymbol{X});\mathrm{d}\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{q} - \boldsymbol{p}\mathrm{d}\tau, \tag{21}$$

将其代入(20)得

$$(\tau^k)^{-1}\kappa^k\mathrm{d}\tau + (-\mathrm{vec}(\boldsymbol{C});\boldsymbol{b})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{q} - \boldsymbol{p}\mathrm{d}\tau) = \eta(\boldsymbol{R}_G^k) + (\tau^k)^{-1}r_C{}^k,$$

即

$$[(\tau^k)^{-1}\kappa^k - (-\mathrm{vec}(\boldsymbol{C}),\boldsymbol{b})\boldsymbol{p}]\mathrm{d}\tau = \eta\boldsymbol{R}_G^k + (\tau^k)^{-1}r_C{}^k - (-\mathrm{vec}(\boldsymbol{C}),\boldsymbol{b})\boldsymbol{q}, \tag{22}$$

此式即为搜索方向系统(15)的等价形式.

因为搜索方向系统的解是存在唯一的, 所以 $\mathrm{d}\tau$ 可以从式(22) 中获得, 进而可以从式(21) 中得到 $\mathrm{vec}(\mathrm{d}\boldsymbol{X}),\mathrm{d}\boldsymbol{y}$, 从式(16), 式(17) 中得到 $\mathrm{vec}(\mathrm{d}\boldsymbol{S}),\mathrm{d}\kappa$.

通过以上分析, 计算搜索方向的主要工作在于计算向量 $\boldsymbol{p}$ 和 $\boldsymbol{q}$.

定义 $\overline{\boldsymbol{K}}:=\begin{bmatrix}(\boldsymbol{F}^k)^{-1}\boldsymbol{E}^k & \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{A} & \boldsymbol{0}\end{bmatrix}$为对称矩阵, 则 $\boldsymbol{p}$ 和 $\boldsymbol{q}$ 是如下线性系统的解

$$\boldsymbol{K}(\boldsymbol{p};\boldsymbol{q}) = \overline{\boldsymbol{K}}(\boldsymbol{p};-\boldsymbol{q}) = (\mathrm{vec}(\boldsymbol{C});-\boldsymbol{b};\tilde{\boldsymbol{r}}).$$

$\boldsymbol{K}$ 是对称矩阵, 据文献有 Bunch-Parlett 分解 $\overline{\boldsymbol{K}} = \boldsymbol{L}\boldsymbol{D}\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}$, 其中 $\boldsymbol{L}$ 是下三角矩阵, $\boldsymbol{D}$ 是一个非奇异的分块对角矩阵, 那么, 可以求出 $\boldsymbol{p}$ 和 $\boldsymbol{q}$, 进而求得方向($\mathrm{d}\boldsymbol{X},\mathrm{d}\boldsymbol{y},\mathrm{d}\boldsymbol{S},\mathrm{d}\tau,\mathrm{d}\kappa$).

3.2　不可行性和对偶间隙的下降关系

本文将限制关系 $\gamma = \tau_1, \tau_1 \leqslant 1/4, \beta \leqslant 1/2$ 成立. 由文献[15]引理 3.5 知, 若$(\boldsymbol{X},\boldsymbol{y},\boldsymbol{S},\tau,\kappa) \in \mathscr{N}(\tau_1,\beta)$, $\tau_1 \leqslant 1/4$, $\beta \leqslant 1/2$, 有如下不等式成立:

$$(\tau - 1)\mu^k(n+1) \leqslant \mathrm{Tr}(\boldsymbol{R}_C^k) + r_C^k \leqslant (\tau + \beta\tau/\sqrt{n+1} - 1)\mu^k(n+1) < 0.$$

所以本文定义

$$\eta = \frac{-\mathrm{Tr}(\boldsymbol{R}_C^k) + r_C^k}{(n+1)\mu^k}. \tag{23}$$

其中关于 $\mathscr{N}(\tau_1,\beta)$ 的介绍在下节给出说明.

引理 3.2　算法更新后, 迭代点的不可行性有如下结论:

(a) $\boldsymbol{R}_P^{k+1} = (1-\alpha\eta)\boldsymbol{R}_P^k$.

(b) $\boldsymbol{R}_D^{k+1} = (1-\alpha\eta)\boldsymbol{R}_D^k$.

(c) $\boldsymbol{R}_G^{k+1} = (1-\alpha\eta)\boldsymbol{R}_G^k$.

证明　(a) 根据 $\boldsymbol{R}_P,\boldsymbol{R}_D,\boldsymbol{R}_G$ 的定义及(15a)可得,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{R}_P^{k+1} &= (\tau^k + \alpha\mathrm{d}\tau)\boldsymbol{b} - \boldsymbol{A}(\mathrm{vec}(\boldsymbol{X}^k) + \alpha\mathrm{vec}(\mathrm{d}\boldsymbol{X}))\\ &= \tau^k\boldsymbol{b} - \boldsymbol{A}\mathrm{vec}(\boldsymbol{X}^k) + \alpha[\boldsymbol{b}\mathrm{d}\tau - \boldsymbol{A}\mathrm{vec}(\mathrm{d}\boldsymbol{X})]\\ &= \boldsymbol{R}_P^k - \alpha\eta\boldsymbol{R}_P^k = (1-\alpha\eta)\boldsymbol{R}_P^k.\end{aligned}$$

同理, 可得(b), (c).

引理 3.3　若 $\tau_1 \leqslant 1/4, \beta \leqslant 1/2$, 则由系统(15)定义的方向满足

$$\mathrm{vec}(\mathrm{d}\boldsymbol{X})^{\mathrm{T}}\mathrm{vec}(\mathrm{d}\boldsymbol{S}) + \mathrm{d}\tau\mathrm{d}\kappa = 0.$$

证明　由系统(15)得

$$\begin{aligned}&\mathrm{vec}(\mathrm{d}\boldsymbol{X})^{\mathrm{T}}\mathrm{vec}(\mathrm{d}\boldsymbol{S}) + \mathrm{d}\tau\mathrm{d}\kappa\\ &= \mathrm{vec}(\mathrm{d}\boldsymbol{X})^{\mathrm{T}}[-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\mathrm{d}\boldsymbol{y} + \mathrm{vec}(\boldsymbol{C})\mathrm{d}\tau - \eta\mathrm{vec}(\boldsymbol{R}_D^k)] +\\ &\quad \mathrm{d}\tau[-\mathrm{vec}(\boldsymbol{C})^{\mathrm{T}}\mathrm{vec}(\mathrm{d}\boldsymbol{X}) + \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\mathrm{d}\boldsymbol{y} - \eta\boldsymbol{R}_G^k]\\ &= [-\mathrm{vec}(\mathrm{d}\boldsymbol{X})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} + \mathrm{d}\tau\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}]\mathrm{d}\boldsymbol{y} -\\ &\quad \mathrm{vec}(\mathrm{d}\boldsymbol{X})^{\mathrm{T}}\mathrm{vec}(\boldsymbol{R}_D^k)\eta - \mathrm{d}\tau\boldsymbol{R}_G^k\eta\\ &= -[(\boldsymbol{R}_P^k)^{\mathrm{T}}\mathrm{d}\boldsymbol{y} + \mathrm{vec}(\mathrm{d}\boldsymbol{X})^{\mathrm{T}}\mathrm{vec}(\boldsymbol{R}_D^k) + \mathrm{d}\tau\boldsymbol{R}_G^k]\eta.\end{aligned} \tag{24}$$

由 $\boldsymbol{R}_P,\boldsymbol{R}_D,\boldsymbol{R}_G$ 的定义知

$$(\boldsymbol{R}_P)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} + \mathrm{vec}(\boldsymbol{X})^{\mathrm{T}}\mathrm{vec}(\boldsymbol{R}_D) + \tau\boldsymbol{R}_G = \mathrm{vec}(\boldsymbol{X})^{\mathrm{T}}\mathrm{vec}(\boldsymbol{S}) + \tau\kappa.$$

对 $(\boldsymbol{y}^k,\boldsymbol{X}^k,\boldsymbol{S}^k,\tau^k,\kappa^k)$ 和 $(\boldsymbol{y}^k + \mathrm{d}\boldsymbol{y},\boldsymbol{X}^k + \mathrm{d}\boldsymbol{X},\boldsymbol{S}^k + \mathrm{d}\boldsymbol{S},\tau^k + \mathrm{d}\tau,\kappa^k + \kappa)$, 有

$$(\boldsymbol{y}^k)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_P^k + \mathrm{vec}(\boldsymbol{X}^k)^{\mathrm{T}}\mathrm{vec}(\boldsymbol{R}_D^k) + \tau^k\boldsymbol{R}_G^k = \mathrm{vec}(\boldsymbol{X}^k)^{\mathrm{T}}\mathrm{vec}(\boldsymbol{S}^k) + \tau^k\kappa^k \tag{25}$$

和

$$\begin{aligned}&(\boldsymbol{y}^k + \mathrm{d}\boldsymbol{y})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_P^k + (\mathrm{vec}(\boldsymbol{X}^k) + \mathrm{vec}(\mathrm{d}\boldsymbol{X}))^{\mathrm{T}}\cdot\\ &\mathrm{vec}(\boldsymbol{R}_D^k) + (\tau^k + \mathrm{d}\tau)\boldsymbol{R}_G^k\\ &= (\mathrm{vec}(\boldsymbol{X}^k) + \mathrm{vec}(\mathrm{d}\boldsymbol{X}))^{\mathrm{T}}(\mathrm{vec}(\boldsymbol{S}^k) +\\ &\quad \mathrm{vec}(\mathrm{d}\boldsymbol{S})) + (\tau^k + \mathrm{d}\tau)(\kappa^k + \mathrm{d}\kappa).\end{aligned} \tag{26}$$

由式(24)—式(26)得如下等式

$$\begin{aligned}&[\mathrm{vec}(\boldsymbol{X}^k)^{\mathrm{T}}\mathrm{vec}(\boldsymbol{S}^k) + \tau^k\kappa^k](1-\eta) +\\ &[(\boldsymbol{R}_P^k)^{\mathrm{T}}\mathrm{d}\boldsymbol{y} + \mathrm{vec}(\mathrm{d}\boldsymbol{X})^{\mathrm{T}}\mathrm{vec}(\boldsymbol{R}_D^k) + \mathrm{d}\tau\boldsymbol{R}_G^k]\cdot\\ &(1-\eta)\\ &= [\mathrm{vec}(\boldsymbol{X}^k)^{\mathrm{T}}\mathrm{vec}(\boldsymbol{S}^k) + \tau^k\kappa^k] +\\ &\quad [\mathrm{vec}(\mathrm{d}\boldsymbol{X})^{\mathrm{T}}\mathrm{vec}(\mathrm{d}\boldsymbol{S}) + \mathrm{d}\tau\mathrm{d}\kappa] +\\ &\quad \mathrm{vec}(\boldsymbol{X}^k)^{\mathrm{T}}\mathrm{vec}(\mathrm{d}\boldsymbol{S}) + \mathrm{vec}(\mathrm{d}\boldsymbol{X})^{\mathrm{T}}\mathrm{vec}(\boldsymbol{S}^k) +\\ &\quad \tau^k\mathrm{d}\kappa + \mathrm{d}\tau\kappa^k.\end{aligned}$$

将式(24)代入上式，得

$$
\begin{aligned}
&(\boldsymbol{R}_P^k)^{\mathrm{T}}\mathrm{d}\boldsymbol{y} + \mathrm{vec}(\mathrm{d}\boldsymbol{X})^{\mathrm{T}}\mathrm{vec}(\boldsymbol{R}_D^k) + \mathrm{d}\tau \boldsymbol{R}_G^k \\
= &[\mathrm{vec}(\boldsymbol{X}^k)^{\mathrm{T}}\mathrm{vec}(\boldsymbol{S}^k) + \tau^k\kappa^k]\eta + \\
&[\mathrm{vec}(\boldsymbol{X}^k)^{\mathrm{T}}\mathrm{vec}(\mathrm{d}\boldsymbol{S}) + \mathrm{vec}(\mathrm{d}\boldsymbol{X})^{\mathrm{T}}\mathrm{vec}(\boldsymbol{S}^k) + \\
&\tau^k\mathrm{d}\kappa + \mathrm{d}\tau\kappa^k].
\end{aligned} \tag{27}
$$

由式(15b)，式(15c)得

$$
\mathrm{vec}(\boldsymbol{X}^k)^{\mathrm{T}}\mathrm{vec}(\mathrm{d}\boldsymbol{S}) + \mathrm{vec}(\mathrm{d}\boldsymbol{X})^{\mathrm{T}}\mathrm{vec}(\boldsymbol{S}^k) + \tau^k\mathrm{d}\kappa + \mathrm{d}\tau\kappa^k = \mathrm{Tr}(\boldsymbol{R}_C^k) + r_C^k. \tag{28}
$$

由式(24)，式(27)，式(28)得

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{vec}(\mathrm{d}\boldsymbol{X})^{\mathrm{T}}\mathrm{vec}(\mathrm{d}\boldsymbol{S}) + \mathrm{d}\tau\mathrm{d}\kappa \\
&= -[(\mathrm{vec}(\boldsymbol{X}^k)^{\mathrm{T}}\mathrm{vec}(\boldsymbol{S}^k) + \tau^k\kappa^k)\eta + \\
&\quad \mathrm{Tr}(\boldsymbol{R}_C^k) + r_C^k]\eta \\
&= -[(n+1)\mu^k\eta + \mathrm{Tr}(\boldsymbol{R}_C^k) + r_C^k]\eta \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

□

引理 3.4　若 $\tau_1 \leqslant 1/4$，$\beta \leqslant 1/2$，则算法更新后对偶间隙满足如下等式

$$
\mu^{k+1} = (1-\alpha\eta)\mu^k.
$$

证明

$$
\begin{aligned}
\mu^{k+1} &= [\mathrm{vec}(\boldsymbol{X}^{k+1})^{\mathrm{T}}\mathrm{vec}(\boldsymbol{S}^{k+1}) + \tau^{k+1}\kappa^{k+1}]/(n+1) \\
&= [(\mathrm{vec}(\boldsymbol{X}^k) + \alpha\mathrm{vec}(\mathrm{d}\boldsymbol{X}))^{\mathrm{T}}(\mathrm{vec}(\boldsymbol{S}^k) + \\
&\quad \alpha\mathrm{vec}(\mathrm{d}\boldsymbol{S})) + (\tau^k + \alpha\mathrm{d}\tau)(\kappa^k + \alpha\mathrm{d}\kappa)]/(n+1) \\
&= \{[\mathrm{vec}(\boldsymbol{X}^k)^{\mathrm{T}}\mathrm{vec}(\boldsymbol{S}^k) + \tau^k\kappa^k] + \\
&\quad \alpha[\mathrm{vec}(\boldsymbol{X}^k)^{\mathrm{T}}\mathrm{vec}(\mathrm{d}\boldsymbol{S}) + \\
&\quad \mathrm{vec}(\mathrm{d}\boldsymbol{X})^{\mathrm{T}}\mathrm{vec}(\boldsymbol{S}^k) + \tau^k\mathrm{d}\kappa + \mathrm{d}\tau\kappa^k] + \\
&\quad \alpha^2[\mathrm{vec}(\mathrm{d}\boldsymbol{X})^{\mathrm{T}}\mathrm{vec}(\mathrm{d}\boldsymbol{S}) + \mathrm{d}\tau\mathrm{d}\kappa]\}/(n+1) \\
&= \mu^k + \alpha\mathrm{Tr}(\boldsymbol{R}_C^k + r_C^k)/(n+1) \\
&= (1-\alpha\eta)\mu^k.
\end{aligned}
$$

其中，第 4 个等式用到引理 3.3.　□

引理 3.2 和引理 3.4 说明当 $\eta = \dfrac{-\mathrm{Tr}(\boldsymbol{R}_C^k + r_C^k)}{(n+1)\mu^k}$，$\tau_1 \leqslant 1/4$，$\beta \leqslant 1/2$ 时，不可行性和最优性以相同的速度降低，下降系数均为$(1-\alpha\eta)$，这是定义中心路径(13)的原因，以及下节将证明的迭代点始终保持在一个宽邻域内，都是本文提出新算法的关键点.

3.3　齐次不可行内点算法

上一节已限制尺度矩阵：

$\mathscr{P}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{S}) := \{\boldsymbol{P} \in S_{++}^n : \boldsymbol{PXS}\boldsymbol{P}^{-1} \in S^n\}$.

本文取 $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{W}^{1/2}$，得到的方向称为 NT 方向. 其中矩阵 $\boldsymbol{W} = \boldsymbol{S}^{\frac{1}{2}}(\boldsymbol{S}^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{X}\boldsymbol{S}^{\frac{1}{2}})^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{S}^{\frac{1}{2}}$ 或者 $\boldsymbol{W} = \boldsymbol{X}^{-\frac{1}{2}}(\boldsymbol{X}^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{S}\boldsymbol{X}^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{X}^{-\frac{1}{2}}$. 可以得到$\boldsymbol{E}^k$，$\boldsymbol{F}^k$ 的值[14]，容易验证 $\boldsymbol{P} \in \mathscr{P}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{S})$ 和 $\boldsymbol{PXP} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{S}\boldsymbol{P}^{-1}$.

定义 $\mathscr{F}_{++} = S_{++}^n \times \Re^m \times S_{++}^n$，SDP 中常用的一个宽邻域是 $-\infty$ 邻域，定义为：

$\mathscr{N}_\infty^-(1-\tau) := \{(\boldsymbol{X},\boldsymbol{y},\boldsymbol{S}) \in \mathscr{F}_{++} : \lambda_{\min}(\boldsymbol{XS}) \geqslant \tau\mu\}$.

其中，$0 < \tau < 1$，$\mu^k = \mathrm{Tr}(\boldsymbol{X}^k\boldsymbol{S}^k)/(n+1)$.

后来，Ai 和 Zhang[11]提出求解线性互补问题的新的宽邻域，Li 和 Terlaky[12]将其推广到半定规划，Liu 等[1]又将其推广到对称锥规划，刘新泽[13]将这种新的宽邻域推广到关于 1 范数的宽邻域. 本文采用 Li 和 Terlaky[12]提出的新的宽邻域：

$$
\begin{aligned}
\mathscr{N}(\tau_1,\tau_2) = \Big\{&(\boldsymbol{X},\boldsymbol{y},\boldsymbol{S}) \in \mathscr{F}_{++} : \\
&\|[\tau_1\mu\boldsymbol{I} - \boldsymbol{X}^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{S}\boldsymbol{X}^{\frac{1}{2}}]^+\|_F \leqslant (\tau_1-\tau_2)\mu\Big\}.
\end{aligned}
$$

其中，$0 < \tau_2 < \tau_1 < 1$.

文献[16]已证明,下面关系成立：

$\mathscr{N}_\infty^-(1-\tau_1) \subseteq \mathscr{N}(\tau_1,\tau_2) \subseteq \mathscr{N}_\infty^-(1-\tau_2)$，$\forall 0 < \tau_2 < \tau_1 < 1$.

为方便，记$\beta := (\tau_1-\tau_2)/\tau_1$，则$\beta \in (0,1)$且

$$
\begin{aligned}
\mathscr{N}(\tau_1,\beta) = \Big\{&(\boldsymbol{X},\boldsymbol{y},\boldsymbol{S}) \in \mathscr{F}_{++} : \\
&\|[\tau_1\mu\boldsymbol{I} - \boldsymbol{X}^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{S}\boldsymbol{X}^{\frac{1}{2}}]^+\|_F \leqslant \beta\tau_1\mu\Big\}.
\end{aligned}
$$

基于以上分析，给出算法的框架：

算法 3.1

输入精度 $\varepsilon > 0$，以及参数 $\tau_1 \leqslant 1/4$，$\beta \leqslant 1/2$.

初始点满足 $(\boldsymbol{X}^0,\boldsymbol{y}^0,\boldsymbol{S}^0,\tau^0,\kappa^0) \in \mathscr{N}(\tau_1,\beta)$，并假设 $k := 0$，$\mu^0 = (\mathrm{Tr}(\boldsymbol{X}^0\boldsymbol{S}^0) + \tau^0\kappa^0)/(n+1)$.

步骤 1　如果 $\mu^k \leqslant \varepsilon\mu^0$，则停止.

步骤 2　计算 NT 尺度矩阵 $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{W}^{1/2}$，由(23)计算参数 η.

步骤 3　由系统(15)计算方向 $(\mathrm{d}\boldsymbol{X}^k,\mathrm{d}\boldsymbol{y}^k,\mathrm{d}\boldsymbol{S}^k,\mathrm{d}\tau^k,\mathrm{d}\kappa^k)$.

步骤 4　计算使 $(\boldsymbol{X}(\alpha^k),\boldsymbol{y}(\alpha^k),\boldsymbol{S}(\alpha^k),\tau(\alpha^k),\kappa(\alpha^k)) \in \mathscr{N}(\tau_1,\beta)$

成立的步长 $\alpha^k = \dfrac{2\beta{\tau_1}^2}{(1+\beta\tau_1)\sqrt{n+1}}$.

步骤 5　令

$(\boldsymbol{X}^{k+1},\boldsymbol{y}^{k+1},\boldsymbol{S}^{k+1},\tau^{k+1},\kappa^{k+1}) = (\boldsymbol{X}(\alpha^k),\boldsymbol{y}(\alpha^k),\boldsymbol{S}(\alpha^k),\tau(\alpha^k),\kappa(\alpha^k))$，

$\mu^{k+1} = (\mathrm{Tr}(\boldsymbol{X}^{k+1}\boldsymbol{S}^{k+1}) + \tau^{k+1}\kappa^{k+1})/(n+1)$，$k :=$

$k+1$, 并转步骤 1.

3.4 算法的复杂性分析

本节在给出一些引理之后, 将证明算法在宽邻域内是收敛的, 且迭代复杂度为 $O(\sqrt{n}\log L)$.

将问题元素尺度化如下:

$$(\hat{X},\hat{y},\hat{S}) = (PXP, y, P^{-1}SP^{-1}),$$

$$(\hat{C},\hat{A}_i,\hat{b}_i) = (P^{-1}CP^{-1}, P^{-1}A_iP^{-1}, b_i),$$

$$(d\hat{X}, d\hat{y}, d\hat{S}) = (PdXP, dy, P^{-1}dSP^{-1}).$$

可以得到

$$P(X,S) = \{P \in S^n_{++} : (PXSP^{-1})^{\mathrm{T}} = PXSP^{-1}\} = \{P \in S^n_{++} : \hat{X}\hat{S} = \hat{S}\hat{X}\}$$

为方便, 记 $X = \begin{bmatrix} X & 0 \\ 0 & \tau \end{bmatrix} \in S^{n+1}_{++}$, $S = \begin{bmatrix} S & 0 \\ 0 & \kappa \end{bmatrix} \in S^{n+1}_{++}$, 那么

$$(15b)和(15c) \Leftrightarrow \hat{X}^k d\hat{S} + d\hat{X}\hat{S}^k = \hat{R}^k_C, \quad (29)$$

$$\Leftrightarrow H_P(X^k dS + dXS^k) = R^k_C, \quad (30)$$

其中,

$$\hat{R}_C = [\gamma\mu I - \hat{X}\hat{S}]^- + \sqrt{n+1}[\gamma\mu I - \hat{X}\hat{S}]^+,$$

$$\mu = \mathrm{Tr}(XS)/(n+1).$$

由式(29)知, 方向系统(15b), (15c)可以转化为

$$\hat{E}^k \mathrm{vec}(d\hat{X}) + \hat{F}^k \mathrm{vec}(d\hat{S}) = \mathrm{vec}(\hat{R}^k_C). \quad (31)$$

其中,

$$\hat{E} = (\hat{S}\otimes I + I\otimes\hat{S})/2, \hat{F} = (\hat{X}\otimes I + I\otimes\hat{X})/2. \quad (32)$$

注意到, 对于 NT 尺度可得 $\hat{X} = \hat{S}, \hat{E} = \hat{F}$, 并且矩阵 $\hat{X}\hat{S}, \hat{S}\hat{X}, XS, SX, X^{1/2}SX^{1/2}, S^{1/2}XS^{1/2}$ 都相似.

引理 3.5[16] 设 $U, V \in S^n$, 则下面不等式成立:

$$\|(U+V)^+\|_F \leqslant \|U^+ + V^+\|_F \leqslant \|U^+\|_F + \|V^+\|_F.$$

引理 3.6[16] 设 $(X,y,S) \in \mathcal{N}(\tau_1,\beta)$, 矩阵 $\hat{E}^k$, $\hat{F}^k$ 由式(32)定义, 并且 $\tau_1 \leqslant 1/4$, $\beta \leqslant 1/2$, 则以下不等式成立

$$\|\hat{E}^{-1}\mathrm{vec}[\gamma\mu I - \hat{X}\hat{S})]^-\|^2 \leqslant (n+1)\mu,$$

$$\|\hat{E}^{-1}\mathrm{vec}[\gamma\mu I - \hat{X}\hat{S})]^+\|^2 \leqslant \beta\tau_1\mu.$$

引理 3.7[16] 设 $u, v, r \in \Re^n$ 与 $A, B \in \Re^{n\times n}$ 满足 $Au + Bv = r$. 若 $BA^{\mathrm{T}} \in S^n_{++}$, 则

$$\|(BA^{\mathrm{T}})^{-1/2}Au\|^2 + \|(BA^{\mathrm{T}})^{-1/2}Bv\|^2 + 2u^{\mathrm{T}}v = \|(BA^{\mathrm{T}})^{-1/2}r\|^2.$$

引理 3.8 假设 $(X,y,S) \in \mathcal{N}(\tau_1,\beta)$, 矩阵 $\hat{E}^k$, $\hat{F}^k$ 由式(32)定义, $\eta = \dfrac{-\mathrm{Tr}(R^k_C + r^k_C)}{(n+1)\mu^k}$, $\tau_1 \leqslant 1/4$, $\beta \leqslant \dfrac{1}{2}$, 若 $\alpha = \dfrac{2\beta\tau_1^2}{(1+\beta\tau_1)\sqrt{n+1}}$, 则以下不等式成立

$$\frac{\alpha}{\sqrt{n+1}}\|[d\hat{X}d\hat{S}]^-\|_F \leqslant \beta\tau_1\mu(\alpha).$$

证明

$$\|[d\hat{X}d\hat{S}]^-\|_F \leqslant \|d\hat{X}d\hat{S}\|_F \leqslant \|d\hat{X}\|_F\|d\hat{S}\|_F = \|\mathrm{vec}(d\hat{X})\|\|\mathrm{vec}(d\hat{S})\| \leqslant \frac{1}{2}(\|\mathrm{vec}(d\hat{X})\| + \|\mathrm{vec}(d\hat{S})\|),$$

利用引理 3.6, 引理 3.7, 引理 3.3 正交性以及式(31)可得

$$\|\mathrm{vec}(d\hat{X})\|^2 + \|\mathrm{vec}(d\hat{S})\|^2 \leqslant \|\hat{E}^{-1}\mathrm{vec}[\gamma\mu I - \hat{X}\hat{S}]^-\|^2 + (n+1)\|\hat{E}^{-1}\mathrm{vec}[\gamma\mu I - \hat{X}\hat{S}]^+\|^2 \leqslant (1+\beta\tau_1)(n+1)\mu,$$

又

$$\mathrm{Tr}(\hat{X}(\alpha)\hat{S}(\alpha)) = \mathrm{Tr}(\hat{X}\hat{S}) + \alpha[\mathrm{Tr}(\tau_1\mu I - \hat{X}\hat{S}) + (\sqrt{n+1}-1)\mathrm{Tr}(\tau_1\mu I - \hat{X}\hat{S})^+].$$

$$\mu(\alpha) = \mu + \alpha\Big[(\tau_1 - 1)\mu + \frac{\sqrt{n+1}-1}{n+1}\mathrm{Tr}(\tau_1\mu I - \hat{X}\hat{S})^+\Big] \geqslant \mu + \alpha(\tau_1-1)\mu \geqslant \mu + \tau_1\mu - \mu = \tau_1\mu.$$

所以,

$$\frac{\alpha}{\sqrt{n+1}}\|[d\hat{X}d\hat{S}]^-\|_F - \beta\tau_1\mu(\alpha) \leqslant \frac{\alpha}{2\sqrt{n+1}}(1+\beta\tau_1)(n+1)\mu - \beta\tau_1^2\mu$$

$$= \Big[\frac{2\beta\tau_1^2}{(1+\beta\tau_1)\sqrt{n+1}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{n+1}} \cdot (1+\beta\tau_1)(n+1) - \beta\tau_1^2\Big]\mu = 0. \qquad \square$$

引理 3.9 假设 $(X,y,S) \in \mathcal{N}(\tau_1,\beta)$, 矩阵 $\hat{E}^k$, $\hat{F}^k$ 由式(32)定义, $\eta = \dfrac{-\mathrm{Tr}(R^k_C) + r^k_C}{(n+1)\mu^k}$, $\tau_1 \leqslant$

$1/4$, $\beta \leqslant \frac{1}{2}$, 若 $\alpha = \frac{2\beta\tau_1^{\ 2}}{(1+\beta\tau_1)\sqrt{n+1}}$, 则

$$(\boldsymbol{X}(\alpha), \boldsymbol{y}(\alpha), \boldsymbol{S}(\alpha)) \in \mathcal{N}(\tau_1, \beta).$$

证明 因为 $\alpha = \frac{2\beta\tau_1^{\ 2}}{(1+\beta\tau_1)\sqrt{n+1}} < \frac{1}{\sqrt{n+1}}$,

由文献[15]引理 4.9 得,

$$\| [\tau_1\mu(\alpha)\boldsymbol{I} - (\hat{\boldsymbol{X}}\hat{\boldsymbol{S}} + \alpha\hat{\boldsymbol{R}}_C)]^+ \|_F \leqslant (1-\alpha\sqrt{n+1})\beta\tau_1\mu(\alpha).$$

所以,

$$\begin{aligned}
&\| [\tau_1\mu(\alpha)\boldsymbol{I} - \boldsymbol{X}(\alpha)^{1/2}\boldsymbol{S}(\alpha)\boldsymbol{X}(\alpha)^{1/2}]^+ \|_F \\
=& \| [\tau_1\mu(\alpha)\boldsymbol{I} - \hat{\boldsymbol{X}}(\alpha)\hat{\boldsymbol{S}}(\alpha)]^+ \|_F \\
=& \| [\tau_1\mu(\alpha)\boldsymbol{I} - (\hat{\boldsymbol{X}} + \alpha\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{X}})(\hat{\boldsymbol{S}} + \alpha\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{S}})]^+ \|_F \\
=& \| [\tau_1\mu(\alpha)\boldsymbol{I} - (\hat{\boldsymbol{X}}\hat{\boldsymbol{S}} + \alpha\hat{\boldsymbol{R}}_C)]^+ \|_F + \\
&\alpha^2 \| [\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{X}}\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{S}}]^- \|_F \\
\leqslant& (1-\alpha\sqrt{n+1})\beta\tau_1\mu(\alpha) + \alpha\sqrt{n+1}\beta\tau_1\mu(\alpha) \\
=& \beta\tau_1\mu(\alpha).
\end{aligned}$$

其中不等式利用了引理 3.8.

引理 3.10[15] 若 $\tau_1 \leqslant 1/4, \beta \leqslant 1/2$, 则

$$\mu(\alpha) \leqslant (1-\xi\alpha)\mu,$$

其中 $\xi = 1 - \tau_1 - \beta\tau_1$.

定理 3.1 当使用 NT 搜索方向时, 算法 4.1 的迭代复杂度是 $O(\sqrt{n}\log L)$.

证明 由引理 3.10 得 $\mu^k \leqslant (1-\xi\alpha)\mu^{k-1} \leqslant (1-\xi\alpha)^{k-1}\mu^0$,

即 $\mathrm{Tr}(\boldsymbol{X}^k\boldsymbol{S}^k) \leqslant (1-\xi\alpha)^k\mathrm{Tr}(\boldsymbol{X}^0\boldsymbol{S}^0)$.

所以, 要使 $\mathrm{Tr}(\boldsymbol{X}^k\boldsymbol{S}^k) \leqslant \varepsilon$ 成立, 即算法终止, 只需保证

$$(1-\xi\alpha)^k\mathrm{Tr}(\boldsymbol{X}^0\boldsymbol{S}^0) \leqslant \varepsilon$$

即可, 即

$$k\log(1-\xi\alpha) \leqslant -\log\frac{\mathrm{Tr}(\boldsymbol{X}^0\boldsymbol{S}^0)}{\varepsilon}.$$

又 $\log(1-\xi\alpha) \leqslant -\xi\alpha$,

所以,

$$k \geqslant \frac{1}{\xi\alpha}\log\frac{\mathrm{Tr}(\boldsymbol{X}^0\boldsymbol{S}^0)}{\varepsilon} = \frac{(1+\beta\tau_1)\sqrt{n+1}}{2\beta\tau_1^{\ 2}\xi} \cdot \log\frac{\mathrm{Tr}(\boldsymbol{X}^0\boldsymbol{S}^0)}{\varepsilon}.$$

即算法 4.1 至多经过 $\left\lceil \frac{(1+\beta\tau_1)\sqrt{n+1}}{2\beta\tau_1^{\ 2}\xi}\log\frac{\mathrm{Tr}(\boldsymbol{X}^0\boldsymbol{S}^0)}{\varepsilon} \right\rceil$ 步迭代后停止. □

4 数值实验

本节将比较算法 3.1 和 Rangarajan[2] 中算法 3.2. 所有测试是在 Windows XP 系统下, 使用 MATLAB R2010(b), 测试一些随机产生的半定规划问题, 包括随机半定规划(表 1), 最大割问题(表 2), 教育测试问题(表 3), 模极小化问题(表 4), 关于 4 个问题的具体理论详见文献[17].

表 1 随机半定规划

Table 1 Random SDP

m	n	算法 3.1 iter	算法 3.1 gap	算法 3.1 normp	算法 3.1 normd	算法 3.2[2] iter	算法 3.2[2] gap	算法 3.2[2] normp	算法 3.2[2] normd
50	100	13.00	4.04e-06	3.40e-10	1.54e-16	17.60	1.27e-04	3.09e-09	1.18e-12
100	100	12.50	4.08e-06	2.50e-10	2.37e-16	17.70	1.39e-04	4.03e-09	1.36e-12
200	100	12.50	5.98e-06	3.71e-10	3.99e-16	18.00	1.37e-04	1.76e-08	1.86e-12
200	200	13.30	4.11e-05	7.11e-10	3.13e-16	17.40	1.07e-03	5.74e-08	6.17e-12
200	300	13.80	8.55e-05	3.76e-09	2.66e-16	17.40	3.36e-03	1.99e-07	9.06e-12
300	300	13.70	6.72e-05	8.50e-09	3.80e-16	17.30	4.25e-03	2.32e-07	1.05e-11

表 2 最大割问题

Table 2 Max-Cut problem

$m=n$	算法 3.1 iter	算法 3.1 gap	算法 3.1 normp	算法 3.1 normd	算法 3.2[2] iter	算法 3.2[2] gap	算法 3.2[2] normp	算法 3.2[2] normd
50	11.20	1.73e-07	2.11e-10	1.27e-16	18.10	5.80e-06	2.59e-13	5.66e-13
100	11.90	7.26e-07	2.29e-10	1.14e-16	19.80	6.50e-05	9.93e-13	2.33e-12
200	12.40	1.24e-06	1.98e-10	1.16e-16	21.50	5.46e-04	2.08e-12	1.06e-11
300	13.10	2.56e-06	1.31e-10	1.18e-16	22.70	1.49e-03	4.83e-12	2.48e-11

表 3　教育测试问题

Table 3　Educational testing problem

m	n	算法 3.1				算法 3.2[2]			
		iter	gap	normp	normd	iter	gap	normp	normd
25	50	16.40	3.44e-08	4.93e-08	4.13e-12	32.30	1.73e-06	1.77e-11	9.99e-14
50	100	19.80	9.92e-08	1.64e-07	8.83e-12	36.70	1.37e-05	2.17e-10	2.80e-13
100	200	24.20	5.89e-07	2.01e-07	4.17e-11	58.90	1.17e-04	2.85e-09	1.95e-12
200	400	26.80	1.82e-06	3.29e-07	4.86e-10	79.20	1.34e-03	1.67e-08	5.18e-12

表 4　模极小化问题

Table 4　Norm minimization problem

m	n	算法 3.1				算法 3.2[2]			
		iter	gap	normp	normd	iter	gap	normp	normd
50	100	12.60	1.66e-09	3.01e-10	1.68e-16	22.80	1.77e-06	9.05e-11	6.38e-13
100	100	12.90	1.49e-09	5.57e-10	2.49e-16	21.70	2.06e-06	6.19e-11	6.03e-13
200	100	12.60	1.94e-09	6.48e-10	3.98e-16	20.00	2.16e-06	6.63e-11	4.72e-13
200	200	14.00	1.26e-09	1.38e-10	2.88e-16	22.00	9.89e-06	6.72e-10	1.60e-12
250	200	13.80	1.83E-09	2.27e-10	1.90e-15	21.50	8.55e-06	6.79e-10	1.28e-12

算法 3.1 中定义:

$$\text{normp} = \|\tau\boldsymbol{b} - \boldsymbol{AX}\|_F,$$

$$\text{normd} = \|\tau\boldsymbol{C} - \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} - \boldsymbol{S}\|_F.$$

算法 3.2 中定义:

$$\text{normp} = \|\boldsymbol{b} - \boldsymbol{AX}\|_F,$$

$$\text{normd} = \|\boldsymbol{C} - \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} - \boldsymbol{S}\|_F.$$

对算法选取最优参数为 $\tau_1 = 0.05, \beta = 0.01$. 使用 NT 尺度化方向,对同一个 m 和 n,运行 10 次取平均值结果列在下表. 从表 1—表 4 可以看出算法 3.1 的平均迭代次数比算法 3.2 减少了 38.35% . 虽然这 2 个程序是粗糙的,但整体上不影响 2 个算法的比较.

5　结论

通过以上讨论,算法迭代后得到 τ 和 κ 的值,结合定理 1.1 可得知可行点的存在性,即原问题是可行问题或者不可行问题. 若原问题是可行问题,结合定理 1.1 可以得到原问题的最优解. 除此结论还可得到如下结论:采用 NT 尺度化矩阵和新的宽邻域得到的复杂度比一般算法的复杂度小,同时也具有更好的实验结果,从而证明本文研究的算法是有效的.

本文提出的是齐次不可行内点算法,此外,也可以研究齐次可行内点算法,具体过程与本文十分相似,进而可以求解辅助问题 HMCP,计算迭代复杂度,测试实验结果,与本文所提出的算法进行比较,具体可以参考文献[16].

参考文献

[1] Liu H, Yang X, Liu C. A new wide neighborhood primal-dual infeasible-interior-point method for symmetric cone programming [J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 2013, 158(3):796-815.

[2] Rangarajan B K. Polynomial convergence of infeasible-interior-point methods over symmetric cones[J]. Siam Journal on Optimization, 2006, 16(4):1 211-1 229.

[3] Andersen E D, Ye Y. On a homogeneous algorithm for the monotone complementarity problem [J]. Mathematical Programming, 1995, 84(2): 375-399.

[4] Cottle R W, Pang J S, Stone R E. The linear complementarity problem [J]. Computer Science and Scientific Computing, 1992, 1: 132-133.

[5] Güler O. Existence of interior points and interior paths in nonlinear monotone complementarity problems [J]. Mathematics of Operations Research, 1993, 18(1):128-147.

[6] Kojima M, Mizuno S, Yoshise A. A convex property of monotone complementarity problems [R]. Department of Information Sciences, Tokyo Institute of Technology, Tokyo, Japan:1993.

[7] 韩继业,修乃华,戚厚铎. 非线性互补理论与算法[M]. 上海:上海科学技术出版社,2006.

[8] Klerk E. Aspects of semidefinite programming[M]. New York, Boston, Dordrecht, London, Moscow: Kluwer Academic Publishers, 2004.

[9] Zhang Y. On extending some primal-dual interior-point algorithms from linear programming to semidefinite programming[J]. Siam Journal on Optimization, 1998, 8(2):365-386.

[10] Shida M, Shindoh S, Kojima M. Existence and uniqueness of search directions in interior-point algorithms for the SDP and the monotone SDLCP[J]. Siam Journal on Optimization,

1998, 8(2): 387-396.

[11] Ai W, Zhang S. An $O(\sqrt{n}L)$ iteration primal-dual path-following method, based on wide neighborhoods and large updates, for monotone LCP [J]. Siam Journal on Optimization, 2005, 16(2): 400-417.

[12] Li Y, Terlaky T. A new class of large neighborhood path-following interior point algorithms for semidefinite optimization with $O\left(\sqrt{n}\log\frac{Tr(X^0 S^0)}{\varepsilon}\right)$ iteration complexity [J]. Siam Journal on Optimization, 2010, 20(6):2 853-2 875.

[13] 刘新泽. 对称锥互补问题若干内点算法的复杂性研究[D]. 西安: 西安电子科技大学, 2014.

[14] Jin S, Ariyawansa K A, Zhu Y. Homogeneous self-dual algorithms for stochastic semidefinite programming [J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 2012, 155(3):1 073-1 083.

[15] 杨喜美. 对称锥规划的宽邻域内点算法研究[D]. 西安: 西安电子科技大学, 2014.

[16] 刘长河. 锥规划中若干内点算法的复杂性研究[D]. 西安: 西安电子科技大学, 2012.

[17] Todd M J, Toh K C, T R H. On the Nesterov-Todd direction in semidefinite programming [J]. Siam Journal on Optimization, 1997, 8(3):769-796.