文章编号:2095-6134(2016)04-0438-05

求 $\mathbb{CP}^n$ 的 $SU(2)$ 轨道的根分布方法*

李小虎†, 肖 良‡

(中国科学院大学数学科学学院, 北京 100049)

(2015 年 9 月 28 日收稿; 2016 年 1 月 27 日收修改稿)

Li X H, Xiao L. Study of $SU(2)$-orbit in $\mathbb{CP}^n$ based on root distribution[J]. Journal of University of Chinese Academy of Sciences, 2016, 33(4): 438-442.

摘　要　从根分布的角度,对齐性二维球面分类结果给出比 Bando 和 Ohnita(J Math Soc Japan,1987, 39:477)更加明显的刻画,求出决定齐性二维球面的 $SU(2)$ 轨道的李群多项式表示的显式表达式,证明复射影空间中 $SU(2)$ 轨道的维数取决于一个对应的扩大复平面系数上的一元 n 次方程的重根和负共轭倒数根对分布,把 $SU(2)$ 轨道维数归结为黎曼球面上 n 个点是否重合或成为对径点的问题. 也初步研究了 $SU(2)$ 三维轨道性质与根分布的关系.

关键词　$SU(2)$; Mobius 变换; 齐性空间; 复射影空间; 球极投影

中图分类号:O186.1　　**文献标志码**:A　　**doi**:10.7523/j.issn.2095-6134.2016.04.002

Study of $SU(2)$-orbit in $\mathbb{CP}^n$ based on root distribution

LI Xiaohu, XIAO Liang

(*School of Mathematical Sciences, University of Chinese Academy of Sciences, Beijing* 100049, *China*)

Abstract　We obtain a more explicit expression than Bando-Ohnita (J Math Soc Japan, 1987, 39: 477) for judging that a $SU(2)$-orbit is a two-dimension homogeneous sphere, based on the root distribution, and study the $SU(2)$-orbit problem in $\mathbb{CP}^n$ by checking whether some n-points are collinear on a Riemann sphere.

Key words　$SU(2)$; Mobius transform; homogeneous space; $\mathbb{CP}^n$; polar projection

$SU(2)$ 在复射影空间上轨道问题是第一个不平凡的轨道研究问题. 在这个问题上 Bando 和 Ohnita[1]讨论 $\mathbb{CP}^n$ 中的齐性二维球面,给出奠基性的成果,为后人广泛引用,也被平行推广得到很多结论,见文献[2-5]. 但他们的研究手法偏于用李代数或者微分方程,对群作用的不变多项式为零所能判别的某个一元 n 次方程的根重数和根分布的结果可决定轨道维数,这一观点没有指出. 在复射影空间的 $SU(2)$ 三维轨道上,也缺乏正面表达的结论.

本文从根分布的角度给出 Bando-Ohnita 对齐性二维球面分类结果的更加明显的刻画,求出了决定齐性二维球面的 $SU(2)$ 轨道的李群多项式表示的显式表达式. 证明复射影空间中 $SU(2)$ 轨道的维数取决于一个对应的扩大复平面系数上的一元 n 次方程的重根和负共轭倒数根对分布. 把

* 国家自然科学基金(11331002)资助

† 通信作者,E-mail:lixiaohu13@mails.ucas.ac.cn; ‡E-mail: lxiao@ucas.ac.cn

$SU(2)$ 轨道维数归结为黎曼球面上 n 个点是否重合或成为对径点的问题. 这为 $SU(2)$ 轨道的深入研究提供了新方法. 另一方面对 $SU(2)$ 三维轨道也初步研究了其性质好坏与根分布的关系.

1　$SU(2)$ 的复表示

在这一节中，我们将采用与文献[3]中相同的一些符号记法. 下边先回顾 $SU(2)$ 不可约表示的一些基本性质.

$SU(2)$ 定义为

$$SU(2)=\left\{g=\begin{pmatrix}a & -\bar{b}\\ b & \bar{a}\end{pmatrix}: a,b\in\mathbb{C}, |a|^2+|b|^2=1\right\}.$$

接着，考虑 $SU(2)$ 的复表示. 令 V_n 为一个$(n+1)$维的复向量空间，它由关于变量 z_0 和 z_1 的 n 次齐次多项式构成. 在 V_n 定义一种 Hermitian 内积$(\,,)$，使得

$$u_k^{(n)}=\frac{1}{\sqrt{k!(n-k)!}}z_0^{n-k}z_1^k;0\leqslant k\leqslant n$$

是 V_n 的一组酉基. 由此，定义实内积为$\langle\,,\rangle=Re(\,,)$. $SU(2)$ 在 V_n 的不可约复表示 ρ_n 定义为：

$$\rho_n(g)p(z_0,z_1):=p(az_0+bz_1,-\bar{b}z_0+\bar{a}z_1),\tag{1}$$

其中 $g\in SU(2)$，$p\in V_n$. 因为$\rho_n(g)u_k^{(n)}\in V_n$，可以记

$$\rho_n(g)u_k^{(n)}=\sum_{i=0}^{n}\lambda_k^i(a,b)u_i^{(n)},$$

其中

$$\lambda_k^i(a,b)=\sqrt{\frac{i!(n-i)!}{k!(n-k)!}}\mu,$$

$$\mu=\sum_{h+r=n-i}\binom{n-i}{h}\binom{i}{r}a^h(\bar{a})^{k-r}b^{n-k-h}(-\bar{b})^r.\tag{2}$$

我们将 V_n 等同于$(n+1)$维复向量空间$\mathbb{C}^{n+1}$，在这种等同下，每一个线性自同态 $\rho_n(g)$ 都可以由矩阵$(\boldsymbol{\lambda}_k^i(a,b))$来表示，于是有李群同态：

$$\rho_n:SU(2)\to U(n+1)$$
$$g\mapsto\rho_n(g)=(\boldsymbol{\lambda}_k^i(a,b)).\tag{3}$$

2　复射影空间的 $SU(2)$ 轨道与一元 n 次方程根集的关系

为使上一节介绍的李群多项式表示成为一个变元，我们引入扩大复平面 $S^2=\mathbb{C}\cup\infty$ 来紧化复数域，对多项式表示空间也重新约定：用扩大复平面上的一元 n 次复变量 z 的多项式全体表示$\mathbb{C}^{n+1}$，用其上的多项式在非零常复数倍下的等价类$[f]$来表示$\mathbb{CP}^n$，则$[f]$由该多项式的零点集合完全确定. 低于 n 次的是退化的情形，也可写成 n 个因子相乘，有些因子退化成 $0z+1$ 认为根是无穷大. 在次数为 k 时，认为有 $n-k$ 重根是 ∞. 此外，定义 $SU(2)$ 在 $\mathbb{CP}^n$上的作用为 $\begin{pmatrix}a & b\\ -\bar{b} & \bar{a}\end{pmatrix}[f(z)]\sim[(-\bar{b}z+\bar{a})^nf((az+b)/(-\bar{b}z+\bar{a}))]$，其中 a,b 是复数，满足 $|a|^2+|b|^2=1$. 以下不加证明地提示一些扩大复平面的这种分式线性变换的重要性质.

引理 2.1　满足 a,b 是复数，$|a|^2+|b|^2=1$ 的分式线性变换 $z\mapsto(az+b)/(-\bar{b}z+\bar{a})$ 有下列性质：

1)它们形成一个群. 且在分式线性变换的复合作群乘法下同构 $SU(2)$ 矩阵群.

2) b/a，$b/\bar{a}$ 都可以取到任何固定的复数.

3)任意 2 个扩大复平面的数可以用这个群迁移.

4)这个群可迁地作用在扩大复平面上，在每一点处的迷向群都是 $SU(2)$ 的对角子群的共轭群在 1)中同构的拉回群.

5)在这个群作用下，扩大复平面是一个齐性空间.

3　球极投影的对径点与 $SU(2)$作用的迷向群的关系

命题 3.1　分式线性变换群$\left\{\frac{az+b}{cz+d};a,b,c,d\in\mathbb{C}\right\}$与 $\sigma(z)=-1/\bar{z}$ 生成的群元都是扩大复平面的自同构，但存在扩大复平面的一个度量，使得分式线性变换中保持这个度量的只有 $a=\bar{d}$，$c=-\bar{b}$ 的子群与 $\sigma(z)=-1/\bar{z}$ 生成的群. 且在扩大复平面到单位球的球极投影下，这个子群是单位球上的保距变换. 特别地，$\widetilde{\sigma}(z)=-1/\bar{z}$，在球面上的诱导变换是球面的对径点之间的置换. 且如下交换图成立：

交换立方图的上层是扩大复平面内的变换，下层是单位球，上下层之间的映射是球极映射.

证明　以单位球面 2 点间的弦长为距离，拉回到扩大复平面可写出一个度量的表达式：单位球面上两点 P 和 P'，对应扩大复平面上 z 和 z'；P 和 P'

$$\begin{tikzcd}
& \frac{az+b}{cz+d} \arrow[rr] \arrow[dd] & & \frac{a-b\bar{z}}{c-d\bar{z}} \arrow[dd] \\
z \arrow[ur, "g"] \arrow[rr, "\sigma"] \arrow[dd, "p"] & & -1/\bar{z} \arrow[ur] \arrow[dd] & \\
& P' \arrow[rr] & & -P' \\
P \arrow[ur] \arrow[rr] & & -P \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

的欧氏距离为 $d(P,P')$，则 $d(P,P')=2|z-z'|/(\sqrt{1+|z|^2}\sqrt{1+|z'|^2})$ 断言这是符合命题的度量.

写 $z=x+yiz$ 在球极投影下对应 $(2x/(1+|z|^2),2y/(1+|z|^2),(|z|^2-1)/(1+|z|^2))$. 由此，$-1/\bar{z}$ 对应 $-(2x/(1+|z|^2),2y/(1+|z|^2),(|z|^2-1)/(1+|z|^2))$，是对径点. 无穷大 ∞，对应北极 $(0,0,1)$. 故复数的负共轭取倒是与球面对径点对应的. 简单的计算可验证图交换. □

现在再看多项式表示空间的多项式的根，根在球极投影到单位球面上的相对位置相同（即任意两根对应点的距离相同，则它们之间是可以用引理 2.1 中的分式线性变换互相迁移的，也就是会在 $\rho(SU(2))$ 作用下的同一轨道上. 同一轨道上，每个点对应球面上的 n 个点相互距离是一样的（至多差一顺序）. 轨道的所有几何量可通过 n 个点相互距离计算出来.

对 Bando-Ohnita[1] 关于齐性二维球面（严格讲不是忠实的 $SU(2)$ 轨道，而是 $SU(2)/S^1$ 轨道）的结论，将 $\mathbb{C}^{n+1}$ 的多项式表示的基底记为 $u_k^{(n)}=z^k/\sqrt{k!(n-k)!}$. 那么 $[z^{n-k}]$ 的对径点（将根映到单位球面取对径的拉回）就是 $[z^k]$. 运用我们的语言表达和证明如下：

设 V_n 为变量 z 的次数不超过 n 的多项式构成的 $(n+1)$ 维的复向量空间，在 V_n 上定义酉积使得 $u_0^{(n)},\cdots,u_n^{(n)}$ 是其一组酉基，其中 $u_k^{(n)}=z^k/\sqrt{k!(n-k)!}$. 记 $S^{2n+1}=\{v\in V^n;\ \langle v,v\rangle=1\}$. 在 S^{2n+1} 上定义等价类 ~ 如下：$f\sim f'$ 当且仅当 $f=cf'$，其中 c 是常数. 令 $\mathbb{CP}^n=S^{2n+1}/\sim$. 在 $\mathbb{CP}^n$ 上取 Fubini-Study 度量，使得自然投影 $\pi:S^{2n+1}\to\mathbb{CP}^n$ 为黎曼淹没.

定理 3.1　$SU(2)$ 在 $\mathbb{CP}^n$ 作用下的一个轨道 M 是浸入 $\mathbb{CP}^n$ 的 2 维轨道当且仅当 $M=\pi(\rho(SU(2))u_k^{(n)}$. 该基点在 $\mathbb{CP}^n$ 中的轨道在多项式空间 V^n 内的表示是 $[(z-c)^k(\bar{c}z+1)^{n-k}/\sqrt{k!(n-k)!}]\cup[z^{n-k}/\sqrt{k!(n-k)!}]$，这里 $1\leqslant k\leqslant n-1$，$k=0$ 或 n 时，轨道是 $[(z-c)^n/\sqrt{n!}]\cup[1]$，$c$ 是一个复数.

证明　由于 $[(z-c)^k(\bar{c}z+1)^{n-k}/\sqrt{k!(n-k)!}]\cup[cz^{n-k}/\sqrt{k!(n-k)!}]$ 是由 $SU(2)$ 中的元素 $1/\sqrt{1+|c|^2}\begin{pmatrix}1 & -c\\ \bar{c} & 1\end{pmatrix}$ 作用在 z^k 上的轨道的多项式表示. $c=\infty$ 时对应的是 $-1/z$ 的变换，得到 z^{n-k}. 这个轨道是二维的原因是，它的根在黎曼球上对应的点要么重合要么是对径点. 若有对径点对，则其决定了一条轴线，绕这轴线的旋转是固定这些根不变的作用，正好是一个 S^1 作用，即 $SU(2)$ 作用的迷向群为 S^1. 故为二维轨道. 若无对径点对，则全汇聚在一个点，这时对应 $k=0$ 或 n 的情形. 得到的是一条全纯曲线. 总之都是实二维的. □

Bando-Ohnita 的结论中有一种特殊情况，即 $n=2k$ 对径点重数都是 k. 此时迷向群有 2 个分支，一个分支是保持对径点不动，即旋转群 S^1，另一个分支就是交换对径点. 我们如果不用上述二维上的基点，由于取法不受限制，总能取到对应球面上的 n 个点线性无关的. 这 n 个点的自同构有限. 迷向群是有限群. 此时基点对应轨道是三维. 这也是下面的章节能够讨论三维轨道的原因. 总结以上分析和论证，得到如下的定理.

定理 3.2　在没有标明映射的地方存在自然诱导的映射，符号同前，下图交换：

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{C}^{n+1} \arrow[r] \arrow[d] & V_n \arrow[r] \arrow[d] & \tilde{\mathbb{C}}^{n+1} \arrow[r] \arrow[d] & (S^2)^n \arrow[d] \\
\mathbb{S}^{2n+1} \arrow[r] \arrow[d, "\sigma'"] & \vec{V}_n \arrow[r] \arrow[d, "\vec{\sigma}"] & \tilde{\mathbb{C}}^{n+1} \arrow[r] \arrow[d, "\tilde{\sigma}"] & (S^2)^n \arrow[d, "\sigma"] \\
\mathbb{S}^{2n+1} \arrow[r] \arrow[d, "\rho_n(SU(2))"] & \vec{V}_n \arrow[r] \arrow[d, "SU(2)"] & \tilde{\mathbb{C}}^{n+1} \arrow[r] \arrow[d, "\frac{az+b}{-\bar{b}z+\bar{a}}"] & (S^2)^n \arrow[d, "SO(3)\times e{,}\sigma"] \\
\mathbb{S}^{2n+1} \arrow[r] \arrow[d, "./\pi"] & \vec{V}_n \arrow[r] \arrow[d] & \tilde{\mathbb{C}}^{n+1} \arrow[r] \arrow[d] & (S^2)^n \arrow[d] \\
\mathbb{CP}^n \arrow[r] & P(V_n) \arrow[r] & \tilde{\mathbb{C}}^{n+1} \arrow[r] & (S^2)^n
\end{tikzcd}$$

其中，$\overrightarrow{V_n}$ 为 V_n 中的系数向量的酉积为 1 的规范化的一元多项式. S^2 是单位球面，坐标分量用 (x,y,z) 表示，则 $\sigma(x,y,z)=-(x,y,z)$，$\widetilde{\sigma}(z)=-1/\bar{z}$，$\sigma'$，$\overrightarrow{\sigma}$，是被它们诱导的映射. 第 1 列第 2 列的映射是乘酉正交化后的多项式基底向量形成多项式，第 2 列到第 3 列是取多项式根，第 3 列到第 4

列是球极投影.

4　$SU(2)$三维轨道的初探

$SU(2)$ 作用的不变量由分式线性变换在黎曼球上的作用可以观察到，是作用前的多项式的根对应的黎曼球上的 n 个点(算上重点)的相对位置关系. 如果 n 个点有一维的自同构群那么因为 $SU(2)$ 自身是 3 个自由度的，得到的轨道将是二维. 反之就是三维的轨道. 这节更关心的是如何在多项式的系数空间里用曲面把决定三维轨道的那些基点描出来.

引理 4.1　关于 t 的复系数一元二次方程 $xt^2/\sqrt{2}+yt+z/\sqrt{2}=0$ 的两根呈负共轭倒数的判别条件是 $|\Delta|=|y^2-2xz|=|x|^2+|y|^2+|z|^2$. (用结式可证明).

命题 4.1　在 $\mathbb{CP}^2$情况下，用酉模为 1 的多项式系数空间$\mathbb{S}^5$的复坐标(x,y,z) 来描叙 $SU(2)$ 轨道，则过单位酉模基点(x_0,y_0,z_0) 的轨道是三维轨道等价于 $|y_0^2-2x_0z_0|\neq 0$，或 1.

证明　定理 3.1 已经证明系数向量属于轨道是二维的基点的充要条件是其轨道过基点$(1,0,0)$，$(0,1,0)$或$(0,0,1)$. 这三者的判别式要么是 0 要么是 1. 下面只需证非 0,1 的点不可能与这 3 个基点共轨道(引理 4.1). 此时方程的根在单位球面上对应的两点不是对径点也不重合，其自同构是有限群，故基点处 $SU(2)$ 作用下的迷向群离散从而为三维轨道.　□

引理 4.2　单位酉模的多项式系数空间 S^{2n+1} 上有 $n-k$ 重根为 z，另外 k 重根为 $-1/\bar{z}$ 的多项式系数的参数表示为 $\dfrac{\sqrt{k!(n-k)!(1+|z|^2)^n}}{-\bar{z}^k e^{i\theta}}(1,-\delta_1,\delta_2,\cdots,(-1)^k\delta_k,\cdots,(-1)^n\delta_n)$，其中 δ_k，是关于 $n-k$ 重根 z，k 重根 $-1/\bar{z}$ 的初等对称多项式，且 δ_k，可以写成 $f(|z|^2)/\bar{z}^k$，f 是有理多项式. 特别地，$n=2k$ 时，$\theta=0$ 成立，这就是说，在模 S^1 作用后，它的参数是全实有理参数.

证明　只证 $(1,-\delta_1,\delta_2,\cdots,(-1)^k\delta_k,\cdots,(-1)^n\delta_n)$ 的模是 $\dfrac{|z|^k}{\sqrt{k!(n-k)!(1+|z|^2)^n}}$ 用定义来求酉内积对 $(\partial_1+1/z\partial_2)^k(\partial_1-\bar{z}\partial_2)^{n-k}(z_1+\dfrac{1}{\bar{z}}z_2)^k(z_1-zz_2)^{n-k}$ 做一对换元令 $g=(z_1+\dfrac{1}{\bar{z}}z_2)^k$，$h=(z_1-zz_2)^{n-k}$，把偏微分算子换成是关于 g,h 的. 整理即得上面的结果. 在 $n=2k$ 的情况，考虑到$(az'+b)^k(-\bar{b}z'+\bar{a})^k$ 中令 $z=-b/a$ 时多项式的首项 $-(a\bar{b})^k$ 可由 $-1/a\bar{b}=z+1/\bar{z}$ 算出，故而直接得到要证的结果，参数 $\theta=0$.　□

注意到引理中的轨道只涉及一个变元 z，分式线性变换可以把它迁移至任意扩大复平面的数，故有如下.

推论 4.1　上述 $n-k$，重根为 z，另外 k 重根为 $-1/\bar{z}$ 决定的单位酉模参数代表的流形都是齐性流形. 自同构群都是 $\rho_n(SU(2))$，自同构群的作用都可迁移，且每点处的迷向群都是 S^1 的共轭群的表示群.

事实上，由文献[6]中的到射影空间的嵌入的像是 Zariski 闭集的定理，这个流形可以用有限个代数方程的交表示出来. 由于推论中的可迁移性，我们发现了一个非此即彼的论断：即在这些个方程交上的基点对应的就是二维轨道，不在它上面的就是三维轨道. 这是命题 4.1 到 $\mathbb{CP}^n$ 的推广.

5　$SU(2)$ 三维轨道与重根分布的对应

我们引入一段方程重根的判别理论，根据 $n=\sum\limits_{i=1}^{r}n_i$ 的不同的正整数分拆，扩大复平面系数上的含重根的一元 n 次方程的重根分布呈现$(n_1,n_2,\cdots,n_r)$ 多种类型，即方程的根分别为 $n_1,n_2,\cdots,n_r$ 重. n_1 重的 x_1，n_2 重的 x_2，$\cdots$，n_r 重的 x_r，x_i，x_j，$1\leqslant i,j\leqslant n$ 可以相等. 如果将其中的某个 n_i 再次分拆成 2 个正整数之和$(n_i-q)+q$，那么对应的重根类型就会成为$(n_1,n_2,\cdots,(n_i-q),q\cdots,n_r)$. 我们把这样的一个操作叫做一次加细，把加细的逆操作叫缩并. 一元 n 次方程的不同类型的重根分布对应什么样的判别式的问题，可以从如下嵌入来考虑：$(\mathbb{CP}^1)^r\to(\mathbb{CP}^1)^n\to\mathbb{CP}^n$：$(x_1,x_2,\cdots,x_r)\xrightarrow{\Delta_{n_1}\times\Delta_{n_2}\times\cdots\times\Delta_{n_r}}(x_1,x_1,\cdots,x_1,x_2,x_2,\cdots,x_2,\cdots,x_r,x_r,\cdots,x_r)\xrightarrow{f}(1,-\delta_1,\cdots,(-1)^k\delta_k,\cdots,\delta_n)$，其中 δ_i 是关于 $x_1,x_1,\cdots,x_1,x_2,x_2,\cdots,x_2,\cdots,x_r,x_r,\cdots,x_r$，这 n 个根的初等对称多项式，$n=\sum\limits_{i=1}^{r}n_i$ 为不同的正整数分拆，为了使映射连续，x_i,x_j 可以取为相等，$1\leqslant i,j\leqslant n$. 那

么 f 的像就成了一个首一一元 n 次方程的系数,其根为 $x_1,x_2,\cdots,x_r$,根的重数为 $(n_1,n_2,\cdots,n_r)$. 由于右边的嵌入是到复射影空间,故由文献[6]得到这个嵌入的像是一个 Zariski 闭集,即可以写成有限个既约的代数方程的交,这个交定义的射影代数簇定义为一元 n 次方程的类型为 $(n_1,n_2,\cdots,n_r)$ 的射影判别式簇,记为 $V(n_1,n_2,\cdots,n_r)$. 那么最初定义的重根类型的一次加细,会诱导判别式簇的一次加细,加细的映射由某个 n_i 重的根分拆成两个重数分别为 (n_i-q),q 根(可以相等)而成. 缩并也是指这个逆过程.

命题 5.1 采用与上面同样的记号, $V(n_1,n_2,\cdots,n_r)$ 的奇异点必是由 $x_1,x_2,\cdots,x_r$ 中某个 $x_i=x_j$, $1\leqslant i,j\leqslant n$ 的缩并在 f 的像下给出的点. k 重奇异点必是 k 次缩并后给出的 f 的像点.

证明 奇异点是 Jacobian 矩阵 $(\partial(-1)^p\delta_p/\partial x_q)$ 的秩较非奇异点小的点. 用母函数的技巧,作矩阵乘积: $\sum_{p=0}^{n}(\partial(-1)^p\delta_p/\partial x_q)x^p=\partial/\partial x_q\sum_{p=0}^{n}(-1)^p\delta_p x^p=\partial/\partial x_q\prod_{i=1}^{r}(x-x_i)^{n_i}$.

若 Jacobian 矩阵较非奇异点的秩少 1,则存在一列不全为零的常数 c_q, 使得 $\sum_{q=1}^{r}c_q(\partial(-1)^p\delta_p/\partial x_q)=0$ 对任意 p 成立,故 $\sum_{q=1}^{r}c_q\partial/\partial x_q\prod_{i=1}^{r}(x-x_i)^{n_i}=0$, n_i 是正整数,由 x 的任意性可以消去关于 x 的公因式,得到 $\sum_{q=1}^{r}C_qc_q\partial/\partial x_q\prod_{i=1}^{r}(x-x_i)=0$,其中 C_q 是求导后得到的某个正整数. 不妨设 $c_1\neq 0$,代入 $x=x_1$ 后发现 $\prod_{i=2}^{r}(x-x_i)=0$ 成立,这意味着必存在某个 i 在 2 到 n 之间,使得 $x_1=x_i$.

若 Jacobian 矩阵较非奇异点的秩少 2,则在原判别式的参数化中代入 $x_1=x_i$ 后,转化为新的 Jacobian 矩阵,其秩较非奇异点的秩少 1. 导致新的缩并会出现. 重复上述操作,得到 k 重奇异点是缩并 k 次得到的判别式簇上的点. □

命题 5.2 扩大复平面上的一元 n 次方程的根中有一对呈负共轭倒数存在的条件可以用关于这个方程的系数的一个方程作等价条件给出,这个方程所代表的超曲面是有奇异性的,其第 $n-2$ 重的奇异点也就是重数最高的奇异点作为基点时对应的 $SU(2)$ 轨道是二维的,且除全纯曲线外的二维轨道的基点只有这么多. 其他点对应的轨道都是三维的.

证明 由该方程,以及做过 z 到 $-1/\bar{z}$ 的变换的方程作结式所得的关于系数的方程,即是这个方程的根有一对呈负共轭倒数存在的充要条件. 按照上述引理,选只有一对呈负共轭倒数且没有其他等根的根分布对应的超曲面上的点,作缩并对应的投影映射, $n-2$ 次后才会投影到全是 z 与 $-1/\bar{z}$ 型的根对应的超曲面上的点上. 此时这些点作为基点时对应的 $SU(2)$ 轨道是二维的. 没有缩并到这个程度的根在单位球面上对应的点的自同构群有限,故为三维. □

参考文献

[1] Bando S, Ohnita Y. Minimal 2-spheres with constant curvature in $\mathbb{CP}^n$[J]. J Math Soc Japan, 1987, 39(3): 477-487.

[2] Fei J, Jiao X X, Xiao L, et al. On the classification of homogeneous 2-spheres in complex Grassmannians[J]. Osaka J Math, 2013, 50: 135-152.

[3] Li H Z, Wang C P, Wu F E. The classification of homogeneous 2-spheres in $\mathbb{CP}^n$[J]. Asian Journal of Mathematics, 2001, 5(1): 93-108.

[4] Jiao X X, Peng J G. On minimal two-spheres in G(2; 4)[J]. Front Math China, 2010, 5(2): 297-310.

[5] Fei J, Jiao X X, Xu X W. On conformal minimal 2-spheres in complex Grassmann manifold G(2; n)[J]. Proc Indian Acad Sci (Math Sci), 2011, 121(2): 181-199.

[6] Shafarevich I R. Basic algebraic geometry[M]. New York: Springer-Verlag, 1990.