文章编号:2095-6134(2016)06-0721-08

Riemann 面上带 cusp 奇点的共形度量*

国金宇†, 吴英毅, 魏志强

(中国科学院大学数学科学学院, 北京 100049)

(2016 年 1 月 29 日收稿; 2016 年 3 月 14 日收修改稿)

Guo J Y, Wu Y Y, Wei Z Q. Conformal metrics on Riemann surfaces with cusp singularities[J]. Journal of University of Chinese Academy of Sciences, 2016,33(6):721-728.

摘 要 Riemann 面上带有奇点的度量是复几何中重要的研究对象. 对 Riemann 面上带有 cusp 奇点且满足面积和 Calabi 能量有限的共形度量进行研究,得到 HCMU 度量在 cusp 奇点附近精确的表达式.

关键词 cusp 奇点; extremal Hermitian 度量; HCMU 度量

中图分类号:O186.1 **文献标志码**:A **doi**:10.7523/j.issn.2095-6134.2016.06.001

Conformal metrics on Riemann surfaces with cusp singularities

GUO Jinyu, WU Yingyi, WEI Zhiqiang

(*School of Mathematical Sciences, University of Chinese Academy of Sciences, Beijing* 100049, *China*)

Abstract The metric on Riemann surface with singularities is one of important objects in complex geometry. We study conformal metrics on Riemann surfaces with only cusp singularities, whose area and Calabi energy are both finite, and obtain the exact expression of HCMU metrics near cusp singularities.

Key words cusp singularity; extremal Hermitian metric; HCMU metric

本文主要对 Riemann 面上带 cusp 奇点的共形度量进行研究.

1 背景和主要定理

1.1 背景

Calabi 在 1982 年引入 extremal Kähler 度量[1],目的是在一个紧 Kähler 流形的固定 Kähler 类中找到“最佳”的度量. 具体地,设 M 为一个紧 Kähler 流形,在一个固定的 Kähler 类中,extremal Kähler 度量是下述 Calabi 能量的临界点

$$\mathscr{C}(g) = \int_M K^2 \mathrm{d}g,$$

这里 K 是 Kähler 类中度量 g 的数量曲率. $\mathscr{C}(g)$ 的 Euler-Lagrange 方程是

$$K_{,\alpha\beta} = 0, 1 \leqslant \alpha, \beta \leqslant \dim_C M, \qquad (1)$$

这里 $K_{,\alpha\beta}$ 是 K 的 2 阶(0,2)型协变导数. 因此我们称在一个紧 Kähler 流形 M 上满足(1)的度量为 extremal Kähler 度量.

Extremal Kähler 度量具有较好的性质,比如紧 extremal Kähler 流形比一般的 Kähler 流形具有

* 国家自然科学基金面上项目(11471308)资助

† 通信作者,E-mail:guojinyu14@163.com

更好的对称性,而且在光滑的紧 Riemann 面上,extremal Kähler 度量就是常曲率度量[1].

经典的单值化定理认为,在紧致无边的 Riemann 面上,对任意的 Riemann 度量,都会有常曲率度量与之共形等价. 单值化定理无疑是经典复分析中非常漂亮和重要的定理.

过去很多人尝试将经典的单值化定理推广到一般的带边曲面. 而过去主要集中在带有奇点的曲面上常曲率度量的存在性问题.

为了推广经典的单值化定理,Chen 等[2-3]继承 Calabi 的思想,研究 Calabi 能量泛函的变分问题. 在这个问题框架内,他们主要研究以下 2 个方面的问题:

1)任意由有限面积和有限 Calabi 能量所组成的度量子集的弱紧性问题,引进了 cusp 奇点,得到有趣的"bubbles on bubbles"现象,并且得到这类度量序列的弱极限如果不为零,则该度量一定有 cusp 奇点. 进而给出 cusp 奇点的基本性质[2-3].

2)Calabi 能量泛函的变分问题. 令 M 为紧 Riemann 面,g_0为 $M\setminus\{p_1,p_2\cdots,p_n\}$ 上的 Hermitian 度量,其中 $p_1,p_2\cdots,p_n$ 为 g_0 的奇点. 如果存在一个光滑函数 $e^{2\varphi}$,使得在 $M\setminus\{p_1,p_2\cdots,p_n\}$ 上满足 $g=e^{2\varphi}g_0$,此时称 g 与g_0 共形等价. 记 $P:=\{p_1,p_2\cdots,p_n\}$,定义 Calabi 能量泛函 $E(g)$ 与面积泛函 $A(g)$ 分别为:

$$E(g)=\int_{M\setminus P}K^2\mathrm{d}g,\ A(g)=\int_{M\setminus P}\mathrm{d}g. \tag{2}$$

其中 K 为 g 的 Gauss 曲率. 定义变分空间 $\mathscr{G}(g_0)$为

$$\mathscr{G}(g_0)=\left\{g\mid g=e^{2\varphi}g_0,\varphi\in H^{2,2}(M),\right.$$

$$\left.\int_{M\setminus P}\mathrm{d}g=\int_{M\setminus P}\mathrm{d}\,g_0\right\}.$$

Calabi 能量泛函的变分问题就是要研究在面积泛函固定的情况下,Calabi 能量泛函最小,即对于任意 $g\in\mathscr{G}(g_0)$,使得 Calabi 能量泛函 $E(g)$ 最小.

我们称 Calabi 能量泛函的临界点为 extremal Hermitian 度量,它的 Euler-Lagrange 方程为

$$\Delta_g K+K^2=C, \tag{3}$$

其中 K 为 g 的 Gauss 曲率, C 为实常数. 式(3)在局部复坐标系 (U,z) 下等价于

$$\frac{\partial K_{,zz}}{\partial\bar{z}}=0. \tag{4}$$

见文献[4]. 由(4)可知 extremal Hermitian 度量有 2 种特殊情况:

1)$K=\mathrm{const}$,即度量 g 为常 Gauss 曲率度量.

2)如果 g 在局部复坐标系 (U,z) 下满足

$$K_{,zz}=0, \tag{5}$$

则称 g 为 HCMU(the Hessian of the curvature of the metric is umbilical)度量. 在下文中,假设共形度量 g 有有限的面积和有限的 Calabi 能量,即

$$A(g)=\int_{M\setminus P}\mathrm{d}g<+\infty,E(g)=\int_{M\setminus P}K^2\mathrm{d}g<+\infty. \tag{6}$$

Chen[4]进一步研究带有 cusp 奇点的 extremal Hermitian 度量的相关性质,并给出 Gauss 曲率 K 在 cusp 奇点附近的相关估计. 进而给出带有 cusp 奇点的 extremal Hermitian 度量的分类定理.

接着 Wang 和 Zhu[5]将 Chen 的关于 cusp 奇点的情况推广到锥奇点情况,他们证明了如果 $g=e^{2\varphi(z)}|\mathrm{d}z|^2$ 为$D\setminus\{0\}$ 上面积和 Calabi 能量都有限的 extremal Hermitian 度量,则 $z=0$ 不是 cusp 奇点就是锥奇点. 进而得到关于锥奇点的分类定理.

Chen 在文献[4]中断言这样一个命题:设 M 为紧 Riemann 面,g 为 $M\setminus\{p_1,p_2\cdots,p_n\}$ 上的共形度量,其中 $p_1,p_2\cdots,p_n$ 为 g 的 cusp 奇点,并且有有限的面积和 Calabi 能量,则在 cusp 奇点附近共形参数一定可以表示为 $-\ln|z|-\beta\ln(-\ln|z|)-\ln\rho(z)$,其中 $\frac{1}{2}<\beta<\frac{3}{2}$,$\rho(z)$ 为 $z=0$ 附近正的光滑函数,但他并没有给出证明.

本文将就他所提出的问题进行研究,进一步给出当 g 为 HCMU 度量时,共形参数在 cusp 奇点的局部表示.

1.2 本文主要定理

定理 1.1 如果 $g=e^{2\varphi(z)}|\mathrm{d}z|^2$ 为 $D\setminus\{0\}$ 上的共形度量,$z=0$ 为 g 的 cusp 奇点,如果共形参数 $\varphi(z)$ 在 cusp 点附近有形式:$\varphi(z)=-\ln|z|-\beta\ln(-\ln|z|)+o(\ln(-\ln|z|))$,且余项 $o(\ln(-\ln|z|))$ 在 $z=0$ 附近(包括 0 点)光滑.

(a) 则 g 在 $D\setminus\{0\}$ 上面积和 Calabi 能量有限的充要条件为 $\frac{1}{2}<\beta<\frac{3}{2}$.

(b) 若 g 为 extremal Hermitian 度量,则 g 在 $D\backslash\{0\}$ 上面积和 Calabi 能量有限的充要条件为 $\beta=1$.

定理 1.2　S^2 上存在只带有一个 cusp 奇点的共形度量 $\tilde{g}$,其保持面积有限、Calabi 能量有限而且共形度量 $\tilde{g}$ 在 cusp 奇点附近表示为

$$\tilde{g}=\frac{1}{|z|^2(\ln|z|)^{2\beta}(\ln(-\ln|z|))^{2\alpha}}|dz|^2,$$

其中,α,β 满足下列关系式:

$$\begin{cases}\beta=\dfrac{1}{2}, & \alpha>\dfrac{1}{2};\\ \dfrac{1}{2}<\beta<\dfrac{3}{2}, & \alpha\text{ 任意};\\ \beta=\dfrac{3}{2}, & \alpha<-\dfrac{1}{2}.\end{cases}$$

定理 1.3　如果 $g=e^{2\varphi(z)}|dz|^2$ 为 $D\backslash\{0\}$ 上的共形度量,$z=0$ 为 g 的 cusp 奇点,并且在 $D\backslash\{0\}$ 上面积和 Calabi 能量都有限,若 g 为 HCMU 度量,则在 $z=0$ 附近共形参数一定可以表示成

$$\varphi(z)=-\ln|z|-\ln(-\ln|z|)+\ln h(z),$$

其中,$h(z)$ 为在 $z=0$ 点连续,在 0 点以外光滑的正函数.

2　预备知识

2.1　弱 cusp 奇点、cusp 奇点、锥奇点

定义 2.1　设 M 是 Riemann 面,$p\in M$. (U,z) 为 p 附近的复坐标系且 $z(p)=0$,g 为 $U\backslash\{p\}$ 上的光滑度量. 如果 $g=e^{2\varphi}|dz|^2$,满足 $\liminf\limits_{r\to0}\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}r\cdot\dfrac{\partial(\varphi+\ln r)}{\partial r}d\theta=0$,其中 $r=|z|$,则称 p 为 g 的弱 cusp 奇点.

定义 2.2　设 M 是 Riemann 面,$p\in M$. (U,z) 为 p 附近的复坐标系且 $z(p)=0$,g 为 $U\backslash\{p\}$ 上的光滑度量. 如果 $g=e^{2\varphi}|dz|^2$,满足 $\lim\limits_{z\to0}\dfrac{\varphi(z)+\ln|z|}{\ln|z|}=0$,则称 p 为 g 的 cusp 奇点.

定义 2.3　设 M 是 Riemann 面,$p\in M$. (U,z) 为 p 附近的复坐标系且 $z(p)=0$,g 为 $U\backslash\{p\}$ 上的光滑度量. 如果 $g=e^{2\varphi}|dz|^2$,并且 $\varphi-(\alpha-1)\ln|z|$ $(\alpha>0)$ 在 p 处连续,则称 p 为 g 的锥奇点并且 g 在 p 处有锥角度 $2\pi\alpha$.

注记:如果在弱 cusp 奇点附近满足面积和 Calabi 能量有限,那么弱 cusp 奇点就是 cusp 奇点,见文献[5].

2.2　cusp 奇点,extremal Hermitian 度量及 HCMU 度量的基本性质

设 M 是一个紧 Riemann 面,$p_1,\cdots,p_n$ 是 M 上的 n 个点,记 $P:=\{p_1,\cdots,p_n\}$. 设 g 是 $M\backslash P$ 上的光滑保角度量. 设 (U,z) 为 $M\backslash P$ 上的局部复坐标系,则 g 在 U 上可以写成

$$g=e^{2\varphi}|dz|^2.$$

此时 g 称为共形度量. 于是 g 在 $M\backslash P$ 上的高斯曲率为 $K=-e^{-2\varphi}\cdot\Delta\varphi$,这里 $\Delta=4\dfrac{\partial^2}{\partial z\partial\bar{z}}$.

在文献[4]中,Chen 研究了面积和 Calabi 能量都有限且只带有 cusp 奇点的 extremal Hermitian 度量. 一方面,他证明如果该 Riemann 面为紧致无边的,则 extremal Hermitian 度量就是 HCMU 度量. 另一方面,给出 Gauss 曲率 K 在 cusp 奇点的精确估计,证明了 Gauss 曲率 K 在 cusp 奇点的极限为负常数.

Chen 和 Wu[6] 继续 Chen 的工作,研究了带有锥奇点的非常曲率 HCMU 度量的存在性问题,主要方法是定义 Gauss 梯度场 $\nabla K=\sqrt{-1}K^{,z}\dfrac{\partial}{\partial z}$ 的对偶亚纯 1-形式,即特征 1-形式,并对特征 1-形式的基本性质进行研究.

Chen 等[7] 将文献[6]中的结果推广到既有 cusp 奇点又有锥奇点的非常曲率 HCMU 度量上.

3　主要定理与证明

现在返回到我们要研究的问题,在只带有 cusp 奇点的 Riemann 面上,共形度量 $g=e^{2\varphi}|dz|^2$ 满足面积和 Calabi 能量都有限,则共形参数 φ 在 cusp 点附近有什么样的性质? 进一步要问如果度量 g 为 HCMU 度量,那么共形参数在 cusp 奇点附近又该如何表示? 共形参数的余项是否一定光滑?

定理 1.1 的证明

证明(a)　因为 $o(\ln(-\ln|z|))$ 光滑,不妨设:$\ln h(z)=o(\ln(-\ln|z|))$,$r=|z|$,其中 $h(z)$ 为 $z=0$ 附近正的光滑函数. 则 $h(z)$ 在充分小闭圆盘 $\overline{D_R(0)}$ 上一致有界,其中 $0<R<\dfrac{1}{3}$.

于是 $\varphi(z)$ 变为

$$\varphi(z) = -\ln r - \beta\ln(-\ln r) + \ln h(z). \quad (7)$$

因此 $g = e^{2\varphi}|dz|^2$ 在 $D_R(0)\setminus\{0\}$ 上保持面积和 Calabi 能量有限等价于

$$A(g)|_{D_R(0)\setminus\{0\}} = \int_{D_R(0)\setminus\{0\}} dg = \int_{D_R(0)\setminus\{0\}} e^{2\varphi}dxdy < +\infty, \quad (8)$$

$$E(g)|_{D_R(0)\setminus\{0\}} = \int_{D_R(0)\setminus\{0\}} K^2 dg = \int_{D_R(0)\setminus\{0\}} \frac{(\Delta\varphi)^2}{e^{2\varphi}}dxdy < +\infty. \quad (9)$$

其中, $K = -e^{-2\varphi}\cdot\Delta\varphi$ 为 g 的 Gauss 曲率.

所以由(7)式和(8)式得

$$\begin{aligned} A(g)|_{D_R(0)\setminus\{0\}} &= \int_0^{2\pi}\int_0^R e^{2\varphi} r dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^R e^{2(-\ln r - \beta\ln(-\ln r)+\ln h)} r dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^R (-\ln r)^{-2\beta} h^2 \frac{1}{r} dr d\theta. \end{aligned}$$

由于 $h(z)$ 在 $z=0$ 附近有正的上下界,所以

$$A(g)|_{D_R(0)\setminus\{0\}} < +\infty$$

等价于

$$\int_0^{2\pi}\int_0^R (-\ln r)^{-2\beta}\frac{1}{r}dr d\theta < +\infty. \quad (10)$$

而(10)式有限的充要条件为 $\beta > \frac{1}{2}$,所以面积 $A(g)|_{D_R(0)\setminus\{0\}}$ 有限的充要条件为 $\beta > \frac{1}{2}$.

另一方面由(7)式得

$$\begin{aligned} \Delta\varphi &= -\beta\Delta\ln(-\ln r) + \Delta\ln h(z) \\ &= \beta\frac{1}{(\ln r)^2 r^2} + \Delta\ln h(z). \end{aligned} \quad (11)$$

所以由(9)式和(11)式得

$$\begin{aligned} E(g)|_{D_R(0)\setminus\{0\}} &= \int_0^{2\pi}\int_0^R \frac{(\Delta\varphi)^2}{e^{2\varphi}} r dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^R [\beta^2(-\ln r)^{2\beta-4} r^{-1} h^{-2} + \\ &\quad 2\beta r(-\ln r)^{2\beta-2} h^{-2}\Delta\ln h + \\ &\quad (\Delta\ln h)^2 r^3(-\ln r)^{2\beta} h^{-2}] dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^R \beta^2(-\ln r)^{2\beta-4} r^{-1} h^{-2} dr d\theta + \\ &\quad 2\beta\int_0^{2\pi}\int_0^R r(-\ln r)^{2\beta-2} h^{-2}\Delta\ln h dr d\theta + \\ &\quad \int_0^{2\pi}\int_0^R (\Delta\ln h)^2 r^3 (-\ln r)^{2\beta} h^{-2} dr d\theta, \end{aligned}$$

由于 $h(z)$ 在 $z=0$ 附近光滑, $\Delta\ln h(z)$ 在 $z=0$ 附近有界,因此后两项绝对可积. 于是

$$E(g)|_{D_R(0)\setminus\{0\}} < +\infty$$

等价于

$$\int_0^{2\pi}\int_0^R \beta^2(-\ln r)^{2\beta-4} r^{-1} h^{-2} dr d\theta < +\infty. \quad (12)$$

而(12)式有限的充要条件为 $\beta < \frac{3}{2}$,所以 Calabi 能量 $E(g)|_{D_R(0)\setminus\{0\}}$ 有限的充要条件为 $\beta < \frac{3}{2}$.

综上得到,若余项 $o(\ln(-\ln|z|))$ 光滑则面积和 Calabi 能量有限的充要条件为 $\frac{1}{2} < \beta < \frac{3}{2}$.

证明(b) 由(7)式和(11)式可知共形度量 g 的 Gauss 曲率 K 为

$$\begin{aligned} K &= -\frac{\Delta\varphi}{e^{2\varphi}} = -\beta(-\ln r)^{2\beta-2} h^{-2} - \\ &\quad \Delta\ln h\cdot h^{-2} r^2(-\ln r)^{2\beta}, \end{aligned} \quad (13)$$

其中, $\frac{1}{2} < \beta < \frac{3}{2}$.

若共形度量 g 为 extremal Hermitian 度量,则由文献[4](定理 B(3))可知,存在负常数 $-c_3$, 满足 $\lim\limits_{x\to 0}K(x) = -c_3$ 显然有

$$\lim_{r\to 0} -\Delta\ln h\cdot h^{-2} r^2(-\ln r)^{2\beta} = 0,$$

因此,极限 $\lim\limits_{x\to 0}K(x)$ 为负常数的充要条件为 $\beta = 1$.

接下来我们将在局部上构造仅带一个 cusp 奇点的度量,再利用单位分解在 S^2 上构造一个带 cusp 奇点的度量.

设 $g = e^{2\varphi}|dz|^2$ 为 $D_{2R}(0)\setminus\{0\}$ 上的共形度量,其中 $0 < R < \frac{1}{6}$,并且共形参数 φ 有下列形式

$$\begin{aligned} \varphi(z) &= -\ln|z| - \beta\ln(-\ln|z|) - \\ &\quad \alpha\ln(\ln(-\ln|z|)). \end{aligned} \quad (14)$$

我们将证明:g 在 $D\setminus\{0\}$ 上满足面积和 Calabi 能量有限的充要条件是 α 和 β 满足下面条件:

$$\begin{cases} \beta = \frac{1}{2}, & \alpha > \frac{1}{2}; \\ \frac{1}{2} < \beta < \frac{3}{2}, & \alpha \text{ 任意}; \\ \beta = \frac{3}{2}, & \alpha < -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

下面给出具体的构造方法.

定理 1.2 的证明

证明　令

$\varphi(z) = -\ln r + \frac{1}{2}\ln\rho(z)$,　$u = -\ln r$,　$r = |z|$,

$\rho(z) = \rho(e^{-u}\cos\theta, e^{-u}\sin\theta) = \frac{1}{(\ln u)^{2\alpha} u^{2\beta}}$(其中 $\beta > 0$).

即 $\varphi(z) = -\ln r - \beta\ln(-\ln r) - \alpha\ln(\ln(-\ln r))$,容易验证对于任意的 α,β ,$\varphi(z)$ 恒满足 cusp 奇点条件. 再令

$$\psi(u,\theta) = \varphi(e^{-u}\cos\theta, e^{-u}\sin\theta) - u = \frac{1}{2}\ln\rho(e^{-u}\cos\theta, e^{-u}\sin\theta), \quad (15)$$

则面积变为

$$\begin{aligned} A(g)|_{D_{2R}(0)\setminus\{0\}} &= \int_{D_{2R}(0)\setminus\{0\}} dg = \int_{D_{2R}(0)\setminus\{0\}} e^{2\varphi(x,y)} dxdy \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^{2R} e^{2\varphi} r dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\int_{-\ln(2R)}^{+\infty} e^{2\psi} du d\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\int_{-\ln(2R)}^{+\infty} \rho(e^{-u}\cos\theta, e^{-u}\sin\theta) du d\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\int_{-\ln(2R)}^{+\infty} \frac{1}{(\ln u)^{2\alpha} u^{2\beta}} du d\theta. \end{aligned}$$

所以由积分的收敛性可知,面积 $A(g)|_{D_{2R}(0)\setminus\{0\}}$ 有限的充要条件为 $\beta = \frac{1}{2}, \alpha > \frac{1}{2}$ 或者 $\beta > \frac{1}{2}$,α 任意.

Calabi 能量变为

$$\begin{aligned} E(g)|_{D_{2R}(0)\setminus\{0\}} &= \int_{D_{2R}(0)\setminus\{0\}} K^2 dg = \int_{D_{2R}(0)\setminus\{0\}} \frac{(\Delta\varphi)^2}{e^{2\varphi}} dxdy \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^{2R} \frac{(\Delta\varphi)^2}{e^{2\varphi}} r dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\int_{-\ln(2R)}^{+\infty} \frac{(\Delta_{u,\theta}\psi)^2}{e^{2\psi}} du d\theta \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\int_{-\ln(2R)}^{+\infty} \frac{[\rho_u''\rho - (\rho_u')^2 - \rho_\theta''\rho + (\rho_\theta')^2]^2}{\rho^5} du d\theta$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\int_{-\ln(2R)}^{+\infty} [2\alpha(\ln u)^{-4\alpha-2} + 2\alpha(\ln u)^{-4\alpha-1} + 2\beta(\ln u)^{-4\alpha}]^2 u^{2\beta-4}(\ln u)^{10\alpha} du d\theta,$$

其中 Laplace 算子 $\Delta_{u,\theta} = \frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$.

由积分的收敛性可知,

$$E(g)|_{D_{2R}(0)\setminus\{0\}} < +\infty$$

等价于

$$\int_{-\ln(2R)}^{+\infty} (\ln u)^{2\alpha} u^{2\beta-4} du < +\infty. \quad (16)$$

而(16)式有限的充要条件为 $\beta = \frac{3}{2}, \alpha < -\frac{1}{2}$ 或 $\beta < \frac{3}{2}$,α 任意.

因而 Calabi 能量 $E(g)|_{D_{2R}(0)\setminus\{0\}}$ 有限的充要条件为 $\beta = \frac{3}{2}$, $\alpha < -\frac{1}{2}$ 或 $\beta < \frac{3}{2}$, α 任意.

综上若 φ 有下面形式

$$\varphi(z) = -\ln|z| - \beta\ln(-\ln|z|) - \alpha\ln(\ln(-\ln|z|)), \quad (17)$$

则 g 在 $D_{2R}(0)$ 上满足面积和 Calabi 能量都有限当且仅当 α,β 满足下列关系式:

$$\begin{cases} \beta = \frac{1}{2}, & \alpha > \frac{1}{2}; \\ \frac{1}{2} < \beta < \frac{3}{2}, & \alpha \text{ 任意}; \\ \beta = \frac{3}{2}, & \alpha < -\frac{1}{2}. \end{cases} \quad (18)$$

接下来在单位球面 S^2 上构造一个共形度量 $\tilde{g}$,使其只带有一个 cusp 奇点并且保持面积和 Calabi 能量都有限.

令 p 为单位球面S^2 上的一点,取 p 点附近的复坐标图 (U_1, z), 使得 $z(p) = 0, z(U_1) = D_{2R}(0)$,其中 R 为上文提到的. 又设

$$g_1 = e^{2\varphi}|dz|^2 = \frac{1}{|z|^2(-\ln|z|)^{2\beta}(\ln(-\ln|z|))^{2\alpha}}|dz|^2, \quad (19)$$

其中,α,β 满足式(18). 令 $U_2 = S^2/z^{-1}(\overline{D_R(0)})$,则 $S^2 = \bigcup_{i=1}^{2} U_i$,令 (U_2, w) 为 U_2 上的复坐标图且在 U_2 上取度量为

$$g_2 = \frac{4|dw|^2}{(1+|w|^2)^2}, \quad (20)$$

则 g_2 的 Gauss 曲率为 1,并且在 U_2 上面积和 Calabi 能量都小于 4π. 取同指标从属于 $\{U_i|_{i=1,2}\}$ 的单位分解 $\{\psi_i|_{i=1,2}\}$. 定义 $S^2\setminus\{p\}$ 上的共形度量 $\tilde{g}$ 为

$$\tilde{g} = \sum_{i=1}^{2} \psi_i g_i, \quad (21)$$

则 $\tilde{g}$ 为$S^2\setminus\{p\}$ 上保持面积和 Calabi 能量都有限的共形度量, p 为S^2 上唯一的 cusp 奇点,但 $\tilde{g}$ 的共

形参数在 p 附近的余项为 $o(\ln(-\ln|z|)) = \alpha\ln(\ln(-\ln|z|))$,因此当 $\alpha\neq 0$ 时余项并不连续.

由定理 1.2 的证明并参照定义 2.2,可以提出新的 cusp 奇点的定义,即

定义 3.1 设 M 为 Riemann 面,$p\in M$,(U,z) 为 p 附近的复坐标图,$g = e^{2\varphi}|dz|^2$ 为 $U\backslash\{p\}$ 上的共形度量,如果 φ 在 $z=0$ 附近有下面形式

$$\varphi(z) = -\ln|z| - \beta\ln(-\ln|z|) + \ln h(z), \tag{22}$$

这里 $\beta > \frac{1}{2}$ 为常数,$h(z)$ 为 U 内的连续函数,我们称 p 点为 g 的强 cusp 奇点. 容易验证 β 为共形不变量,并且 $\beta > \frac{1}{2}$ 是为了保证 g 有有限的面积.

因此,从定理 1.2 的证明中可得:即使在面积和 Calabi 能量都有限的条件下也不能得出 cusp 奇点与强 cusp 奇点等价.

下面的定理 1.3 将要证明:如果度量为 HCMU 度量并且满足面积和 Calabi 能量有限,则 cusp 奇点一定是强 cusp 奇点,并且此时定义 3.1 中 $\beta = 1$.

定理 1.3 的证明

证明 首先由 HCMU 度量的定义可知,$K_{,zz} = 0$ 等价于 $\nabla K = \sqrt{-1}\,e^{-2\varphi}K_{\bar z}\frac{\partial}{\partial z}$ 为 $D\backslash\{0\}$ 上的全纯向量场.

令 $F = 4e^{-2\varphi}K_{\bar z}$,则 F 为 $D\backslash\{0\}$ 上的全纯函数,并且由文献[4](定理 B(2))可知,$z=0$ 为 F 的零点. 由于 K 不为常数,$z=0$ 不为 F 零点的聚点,因此存在 $z=0$ 的开邻域,在该开邻域内除 $z=0$ 外不再有 F 的零点,不妨设该开邻域就是 D,于是 $z=0$ 为 $\frac{1}{F}$ 在 D 上唯一的极点. 类似于文献[7]中的讨论,可得下面 3 个结果:

1)存在 $C'\in\mathbb{R}$,使得在 $D\backslash\{0\}$ 上有

$$-4\sqrt{-1}\,\nabla K(K) = -\frac{K^3}{3} + CK + C', \tag{23}$$

这里 C 为(3)式中的常数. 由此可得

$$e^{2\varphi} = 4\left(-\frac{K^3}{3} + CK + C'\right)\left|\frac{1}{F}\right|^2. \tag{24}$$

2)存在 $\mu < 0$ 使得

$$\lim_{x\to 0}K(x) = \mu, \tag{25}$$

并且

$$-\frac{K^3}{3} + CK + C' = -\frac{1}{3}(K-\mu)^2(K+2\mu). \tag{26}$$

3)若令 $\omega = \frac{dz}{F}$,则 $z=0$ 为 ω 的一阶极点,并且 ω 在 $z=0$ 处的留数为实数.

于是可设

$$\omega = \frac{dz}{F} = \frac{\lambda_{-1}}{z}dz + d f_1 = \frac{\Phi(z)}{z}dz, \tag{27}$$

其中 λ_{-1} 为 ω 在 $z=0$ 处的留数,f_1 为在 $z=0$ 附近的全纯函数,Φ 为 $z=0$ 附近的全纯函数且 $\Phi(0) = \lambda_{-1}\neq 0$. 所以由上面的 1)、2)、3)并结合文献[7](定理 1.1)得到

$$\frac{-3dK}{(K-\mu)^2(K+2\mu)} = \omega + \bar\omega = \lambda_{-1}d\ln|z|^2 + 2d\mathrm{Re}(f_1), \tag{28}$$

$$e^{2\varphi} = -\frac{4}{3}(K-\mu)^2(K+2\mu)\left|\frac{\Phi(z)}{z}\right|^2. \tag{29}$$

由于(28)式左端可分解为

$$\frac{-3dK}{(K-\mu)^2(K+2\mu)} = -\left(\frac{1}{K+2\mu} - \frac{1}{K-\mu} + \frac{3\mu}{(K-\mu)^2}\right)\frac{dK}{3\mu^2}$$
$$= -\frac{1}{3\mu^2}d\left(\ln(-2\mu-K) - \ln|\mu-K| - \frac{3\mu}{K-\mu}\right). \tag{30}$$

所以(28)式等价于

$$-\frac{1}{3\mu^2}d\left(\ln(-2\mu-K) - \ln|\mu-K| - \frac{3\mu}{K-\mu}\right) = d(\lambda_{-1}\ln|z|^2 + 2\mathrm{Re}(f_1)). \tag{31}$$

对(31)式两边同时积分得

$$-\frac{1}{3\mu^2}\left(\ln(-2\mu-K) - \ln|\mu-K| - \frac{3\mu}{K-\mu}\right) = \lambda_{-1}\ln|z|^2 + 2\mathrm{Re}(f_1) + C, \tag{32}$$

其中,C 为常数.

由(29)式得

$$\varphi(z) = \frac{1}{2}\ln\left[(K-\mu)^2(-2\mu-K)\cdot\frac{4}{3}\frac{|\Phi(z)|^2}{|z|^2}\right], \tag{33}$$

即

$$\varphi(z) = -\ln|z| + \ln|\mu-K| +$$

$$\frac{1}{2}\ln(-2\mu-K)+\frac{1}{2}\ln\frac{4}{3}+\ln\Phi(z).\quad(34)$$

再将(34)式代入 cusp 奇点条件得

$$\lim_{z\to 0}\frac{\ln|\mu-K|}{\ln|z|}=0,\quad(35)$$

再对(32)式两边同除 $\ln|z|$，利用(35)式得到

$$\lim_{z\to 0}\frac{\frac{1}{2\mu}}{(K-\mu)\ln|z|}=\lambda_{-1},\quad(36)$$

其中，λ_{-1} 为 ω 在 $z=0$（即 cusp 奇点）处的留数.

由于特征 1－形式 ω 在 cusp 奇点处留数可正可负，所以 Gauss 曲率 K 有 2 种情况. 但无论哪种情况都有下面的式子成立：

1）当 $K<\mu$ 时，$\lim\limits_{z\to 0}\frac{\ln(\mu-K)}{-\ln(-\ln|z|)}=1$；

2）当 $\mu<K<-2\mu$ 时，$\lim\limits_{z\to 0}\frac{\ln(K-\mu)}{-\ln(-\ln|z|)}=1.$

我们证明第 1 种情况，第 2 种情况类似.

当 $K<\mu$ 时，由(36)式得

$$\lim_{z\to 0}(K-\mu)\cdot\ln|z|=\frac{1}{2\mu\lambda_{-1}}.\quad(37)$$

由极限定义 $\forall\varepsilon>0$ 充分小，$\exists\delta>0$，使得当 $0<|z|<\delta$ 时，有 $\left|(K-\mu)\cdot\ln|z|-\frac{1}{2\mu\lambda_{-1}}\right|<\varepsilon$

所以

$$\left(\frac{1}{2\mu\lambda_{-1}}-\varepsilon\right)\cdot(-\ln|z|)^{-1}<\mu-K<\left(\frac{1}{2\mu\lambda_{-1}}+\varepsilon\right)\cdot(-\ln|z|)^{-1}.\quad(38)$$

由 ln 的单调性，对(38)式两边同取 ln 有

$$\ln\left(\frac{1}{2\mu\lambda_{-1}}-\varepsilon\right)-\ln(-\ln|z|)<\ln(\mu-K)<\ln\left(\frac{1}{2\mu\lambda_{-1}}+\varepsilon\right)-\ln(-\ln|z|).\quad(39)$$

对(39)式两边同除 $-\ln(-\ln|z|)$ 有

$$\frac{\ln\left(\frac{1}{2\mu\lambda_{-1}}-\varepsilon\right)}{-\ln(-\ln|z|)}+1>\frac{\ln(\mu-K)}{-\ln(-\ln|z|)}>\frac{\ln\left(\varepsilon+\frac{1}{2\mu\lambda_{-1}}\right)}{-\ln(-\ln|z|)}+1.\quad(40)$$

由(40)式得到

$$\lim_{z\to 0}\frac{\ln(\mu-K)}{-\ln(-\ln|z|)}=1.\quad(41)$$

所以由(34)式、(41)式共形参数 $\varphi(z)$ 在 cusp 奇点附近一定可以写成

$$\varphi(z)=-\ln|z|-\ln(-\ln|z|)+\ln[(\mu-K)(-\ln|z|)]+\frac{1}{2}\ln(-2\mu-K)+\frac{1}{2}\ln\frac{4}{3}+\ln\Phi(z).\quad(42)$$

再由(37)式知道(42)式的余项 $o(\ln(-\ln|z|))$，在 $z=0$ 处连续 0 以外光滑.

所以(42)式经整理得到

$$\varphi(z)=-\ln|z|-\ln(-\ln|z|)+\ln h_1(z),\quad(43)$$

其中，$h_1(z)$ 为在 $z=0$ 处连续，在 $z=0$ 以外光滑的正函数.

同理可以求出当 $\mu<K<-2\mu$ 时，$\varphi(z)$ 在 cusp 奇点的局部表达式为

$$\varphi(z)=-\ln|z|-\ln(-\ln|z|)+\ln h_2(z),\quad(44)$$

其中，$h_2(z)$ 为在 $z=0$ 处连续，在 $z=0$ 以外光滑的正函数.

所以综上得到如果 g 为 HCMU 度量，共形参数在 cusp 奇点附近一定可以写成

$$\varphi(z)=-\ln|z|-\ln(-\ln|z|)+\ln h(z),\quad(45)$$

其中，$h(z)$ 为在 $z=0$ 处连续，在 $z=0$ 以外光滑的正函数.

推论 3.1　令 M 为紧致无边的 Riemann 面，记 $P:=\{p_1,p_2,\cdots,p_n\}$，$g=e^{2\varphi}|dz|^2$ 为 $M\backslash P$ 上的 extremal Hermitian 度量，其中 P 为 M 的 cusp 奇点，且 g 在 $M\backslash P$ 上保持面积和 Calabi 能量都有限，则共形参数在 cusp 奇点附近一定可以写成

$$\varphi(z)=-\ln|z|-\ln(-\ln|z|)+\ln h(z),\quad(46)$$

其中，$h(z)$ 为在 $z=0$ 处连续，在 $z=0$ 以外光滑的正函数.

证明　由文献[4]（定理 A）我们知道：如果 M 为紧致无边，g 是 $M\backslash\{p_1,p_2,\cdots,p_n\}$ 上的 extremal Hermitian 度量，其中 $p_1,p_2,\cdots,p_n$ 为 g 的 cusp 奇点，并且满足面积和 Calabi 能量都有限，则共形度量 g 一定为 HCMU 度量，进而由上面的定理 1.3 得到结果.

4　后续的讨论

对于一般 Riemann 面上的 extremal Hermitian 度量，其在 cusp 奇点附近面积和 Calabi 能量都有限，我们推测共形参数 φ 在 cusp 奇点附近也可以

表示为

$$\varphi(z) = -\ln|z| - \ln(-\ln|z|) + \ln h(z),$$

其中, $h(z)$ 为在 $z=0$ 处连续,在 $z=0$ 以外光滑的正函数.

因为无论从定理 1.3 还是最后的推论 3.1,都有迹象表明应该会有这样的形式,因此我们会在后续研究中予以讨论.

参考文献

[1] Calabi E. Extremal Kähler metrics [C] // Seminar on Differential Geometry. Annals of Mathematical Studies 102, Princeton: Princeton Univ Press, 1982: 259-290.

[2] Chen X X. Weak limits of Riemannian metrics in surfaces with integral curvature bound[J]. Calc Var, 1998, 6: 189-226.

[3] Chen Q, Chen X X, He W Y. Singular angles of weak limiting metrics under certain integral curvature bounds[J]. Pacific Journal of Mathematics, 2007, 231(1): 35-49.

[4] Chen X X. Extremal Hermitian metrics on Riemann surfaces [J]. Calc Var, 1999, 8: 191-232.

[5] Wang G F, Zhu X H. Extremal Hermitian metrics on Riemann surfaces with singularities[J]. Duke Math Journal, 2000, 104(2): 181-210.

[6] Chen Q, Wu Y Y. Character 1-form and the existence of an HCMU metric[J]. Mathematische Annalen, 2011, 351(2): 327-345.

[7] Chen Q, Wu Y Y, Xu Bin. On one-dimensional and singular Calabi's extremal metrics whose Gauss curvatures have nonzero umbilical Hessians [J]. Isreal Journal of Mathematics, 2015, 208(1): 385-412.