文章编号:2095-6134(2017)01-0001-07

变化环境中分枝树上有偏随机游动的状态分类*

张志洋,胡晓予†

(中国科学院大学数学科学学院, 北京 100049)

(2015 年 12 月 30 日收稿; 2016 年 5 月 20 日收修改稿)

Zhang Z Y, Hu X Y. Classification of states for a biased random walk on a branching tree in the varying environment [J]. Journal of University of Chinese Academy of Sciences, 2017,34(1):1-7.

摘　要　考虑变化环境中分枝树上的广义有偏随机游动, 分别得到随机游动为暂留的、正常返的和零常返的充分条件,为进一步研究这类随机游动的中心极限定理等性质做了铺垫。

关键词　树上随机游动; 变化环境中分枝过程; 常返性; 暂留性

中图分类号:O211.62;O211.65　　**文献标志码**:A　　**doi**:10.7523/j.issn.2095-6134.2017.01.001

Classification of states for a biased random walk on a branching tree in the varying environment

ZHANG Zhiyang, HU Xiaoyu

(*School of Mathematical Sciences*, *University of Chinese Academy of Sciences*, *Beijing* 100049, *China*)

Abstract　In this study we investigate biased random walk on branching trees in the varying environment. We have obtained the sufficient conditions for transience, positive recurrence, and null recurrence. Our main result enables the further study on the central limit theory for this kind of random walks.

Keywords　random walk on a tree; branching process in the varying environment; recurrence; transience

随机游动是随机过程中的一个经典模型。早在概率论发展初期,就有人曾经考虑过直线上的简单随机游动和有偏随机游动等问题[1]。如今这方面的研究对象已经从直线上的随机游动扩展到随机图和网络上的随机游动, 以及随机环境中的随机游动和各种代数结构上的随机游动[2-4]。

随机游动研究中的一个基本问题是状态分类问题。历史上 Kolmogorov, Polya, Kakutani 等都曾经讨论过这一问题, Polya 还给出了 $\mathbb{N}^n$ 上随机游动常返性判别的经典结果[5]。1984 年 Doyle 与 Snell[6] 系统性地总结前人的结果, 将随机游动与电网络联系起来, 利用电导函数描述随机游动的常返性和暂留性。其后, Lyons[7] 得到树上随机游动的状态分类结果;在他的工作基础上, Peres 和 Zeitouni[8] 运用经典分枝树上的 λ - 有偏随机游动的可逆性和耦合方法得到这种随机游动的中心极限定理。

2006 年 Collevecchio[9] 利用另一种方法, 在 Lyons 工作的基础上得到经典分枝树上的 λ - 有偏随机游动的状态分类结果。我们则考虑变化环

* 国家自然科学基金(11171342)资助
† 通信作者,E-mail:xyhu@ucas.ac.cn

境中的分枝树上的广义有偏随机游动，得到其状态分类的结果，文献[9]中的结果恰为我们的结论的特例。

1 背景知识

设 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 为一个概率空间，本文以下涉及的随机变量均定义在此空间上，由 P 决定的期望记为 E。记$\mathbb{N}^*$ 为全体正整数构成的集合，$\mathbb{N}=\{0\}\cup\mathbb{N}^*$。若存在正常数 c_1 和 $c_2>0$ 使得当 x 充分大时，有

$$c_1 g(x)\leqslant f(x)\leqslant c_2 g(x),$$

则记 $f(x)\approx g(x), x\to\infty$。

定义 1.1 (树)设 U 为由如下形式的有限正整数序列所构成的集合：$<i_1,i_2,\cdots,i_n>$，其中 $i_k\in\mathbb{N}^*, 1\leqslant k\leqslant n, n\in\mathbb{N}$(当 $n=0$ 时，表示空序列)。对于任一个 U 的子集 T，若它满足如下条件：

(a)空序列 $\phi\in T$;

(b)若对某个 $j\in N^*$，$<i_1,i_2,\cdots,i_k,j>\in T$，则必有 $<i_1,\cdots,i_k>\in T$;

(c)若 $u=<i_1,i_2,\cdots,i_k>\in T$，$\nu_u(T)$ 是依赖于 u 和 T 的某正整数(也称 $\nu_u(T)$ 为 T 上节点 u 的分枝数)，则对于所有的 $1\leqslant j\leqslant\nu_u(T)$，总有 $<i_1,i_2,\cdots,i_k,j>\in T$;

则称 T 为一棵树，空序列称为树的根，以 o 记之。称 T 中全体序列长度的上确界为树 T 的高度。若 $v=<i>\in T$，则称

$T^v:=\{<i,i_1,i_2,\cdots,i_n>:<i,i_1,i_2,\cdots,i_n>\in T\}$

为 T 中根为 v 的子树。任取 $n\geqslant 1$，记树 T 在高度 n 处的截断为

$$T|_n:=\{<i_1,i_2,\cdots,i_k>\in T;k\leqslant n\}.$$

对任意的 n，称 $<i_1,i_2,\cdots,i_n>\in T$ 为 T 的顶点，以 v 记之。设 u,v 为 T 上的 2 个顶点，若存在 $i_1,i_2,\cdots,i_n$ 和 j 使 $v=<i_1,i_2,\cdots,i_n>$，$u=<i_1,i_2,\cdots,i_n,j>$，则称 v 为 u 的父亲，记为 $v=\overleftarrow{u}$；或称 u 为 v 的儿子，也可记为 $u=\vec{v}$。记顶点 v 的儿子个数为 $d_v(T)$(或 d_v)；记顶点 v 的第 n 代子孙的全体为 $D_n(T,v)$(或 $D_n(v)$)；根 o 的第 n 代子孙的全体记为 $D_n(T)$；以 $|D_n(T)|$ 记第 n 代子孙的个数；记 $|v|$ 为顶点 $v\in T$ 到 T 的根 o 的距离，即从根 o 到 v 最短路径上边的总数，有时也称节点 v 具有高度 $|v|$。

记 $\mathscr{T}$ 为全体树构成的集合，则在度量 $d(T,T')=\dfrac{1}{1+\sup_n\{n:T|_n=T'|_n\}}(T,T'\in\mathscr{T})$ 下，$(\mathscr{T},d)$ 构成一个度量空间。

定义 1.2(G-W 过程和分枝树)令 $Z_0=1$ 且对于任意的 $n\geqslant 0$，

$$Z_{n+1}=\begin{cases}\sum_{j=1}^{Z_n}X_{n,j}, & Z_n\neq 0,\\ 0, & Z_n=0,\end{cases}$$

其中 $\{X_{n,j},n\geqslant 0,j\geqslant 1\}$ 为独立同分布的随机变量序列，其共同分布为 $\{p(j),j\geqslant 0\}$，$\{Z_n:n\geqslant 0\}$ 称为经典的 Galton-Watson 分枝过程，简称为 GW 过程，记 $m=\sum_{j=1}^{\infty}jp(j)$。本文中总假设 $p(0)=0, 0<p(1)<1$。若 $m>1$，则称该分枝过程为上临界的。以分枝连接每一代的个体，得到的图称为经典分枝树。

定义 1.3 (G-W 测度)设 $\{p(k),k\geqslant 0\}$ 为某 Galton-Watson 过程的分布律，$\mathscr{B}(\mathscr{T})$ 为度量空间 $(\mathscr{T},d)$ 的 Borel σ－代数，根据文献[10]中的结论，在 $(\mathscr{T},\mathscr{B}(\mathscr{T}))$ 上存在一个唯一的概率测度，为 GW，它满足：任取 n 个非负整数 $k_j, 1\leqslant j\leqslant n$，再取 n 个任意的顶点 $v_1,v_2,\cdots,v_n, n\geqslant 1$，

$$GW\{T\in\mathscr{T}:v_j\in T,1\leqslant j\leqslant n,\bigcap_{j=1}^{n}\{d_{v_j}=k_j\}\}=\prod_{j=1}^{n}p(k_j).$$

本文中由测度 GW 决定的期望记为 E_{GW}。

类似地，可以定义变化环境中的分枝过程，以及变化环境中的分枝树。

定义 1.4 令 $Y_0=1$ 且对于任意的 $n\geqslant 0$，

$$Y_{n+1}=\begin{cases}\sum_{j=1}^{Y_n}U_{n+1,j},(x) & Y_n\neq 0;\\ 0, & Y_n=0,\end{cases}$$

其中 $\{U_{n,j}:n\geqslant 1,j\geqslant 1\}$ 是相互独立的随机变量序列，对任意给定的 $n\geqslant 1$，$\{U_{n,j}:j\geqslant 1\}$ 有相同的概率分布 $\{p^{(n)}(j),j\in\mathbb{N}\}$，称 $\{Y_n:n\geqslant 0\}$ 为变化环境中的分枝过程，记 $m_n=\sum_{j=1}^{\infty}jp^{(n)}(j)$。当 $m_n>1, n\geqslant 1$ 时，称该分枝过程为上临界的。以分枝连接每一代的个体，得到的图称为变化环境中的分枝树。本文总假设

$$p^{(n)}(0)=0, 0<p^{(n)}(1)<1, n\geqslant 1.$$

定义 1.5 设 $\{p^{(l)}(j),l\geqslant 1,j\geqslant 0\}$ 为某一个变化环境中的分枝过程的分布律，$\mathscr{B}(\mathscr{T})$ 为度量空间 $(\mathscr{T},d)$ 上的 Borel σ－代数，定义集合函数 VGW 如下：任取 $n\geqslant 1$ 以及 n 个非负整数 $k_j, 1\leqslant j\leqslant n$，

再取 n 个任意的顶点分别记为 $v_1,v_2,\cdots,v_n$, 令

$$VGW\{T\in\mathscr{T}:v_j\in T,1\leqslant j\leqslant n,\bigcap_{j=1}^{n}\{d_{v_j}=k_j\}\}=\prod_{j=1}^{n}p^{(|v_j|)}(k_j).$$

可以证明 VGW 可唯一扩张为 $\mathscr{B}(\mathscr{T})$ 上的一个概率测度, 详见下节命题 2.1。

定义 1.6　给定一棵由上临界的 G-W 树 T, 其分布律为 $\{p(k),k\geqslant 0\}$,设 $\{X_n:n\geqslant 0\}$ 为定义在 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 上取值于 T 且从根 o 出发的马氏链, 其转移概率为

$$P_T(X_{n+1}=w\mid X_n=v)=\begin{cases}\dfrac{\lambda}{\lambda+d_v},v=\vec{w},\\ \dfrac{1}{\lambda+d_v},w=\vec{v},v\neq o,\\ \dfrac{1}{d_o},v=o,w=\vec{o}.\end{cases}$$

其中 $w,v\in T,\lambda$ 为正常数, 我们称 $\{X_n:n\geqslant 0\}$ 为 GW 树 T 上的 λ − 有偏随机游动。

类似地,可以定义变化环境中分枝树上的 $\{\lambda_n,n\geqslant 1\}$ − 有偏随机游动如下。

定义 1.7　给定一棵上临界的变化环境中的分枝树 T, 其后代分布律为 $\{p^{(n)}(j),n\geqslant 1,j\geqslant 0\}$,又给定一列正实数 $\{\lambda_l,l\geqslant 1\}$,若 $\{V_n:n\geqslant 0\}$ 为定义在 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 上取值于 T 且从根 o 出发的马氏链, 其转移概率为

$$P_T(V_{n+1}=w\mid V_n=v)=\begin{cases}\dfrac{\lambda_{|v|}}{\lambda_{|v|}+d_v},v=\vec{w},\\ \dfrac{1}{\lambda_{|v|}+d_v},w=\vec{v},v\neq o,\\ \dfrac{1}{d_o},v=o,w=\vec{o}.\end{cases}$$

其中 $w,v\in T$,对任意的 $u\in T,|u|=l$, d_u 的分布律为 $\{p^{(l+1)}(k),k\geqslant 0\}$,我们称 $\{V_n:n\geqslant 0\}$ 为变化环境中分枝树 T 上的 $\{\lambda_n,n\geqslant 1\}$ − 有偏随机游动。

根据 Lyons[7] 关于树上有偏随机游动状态分类的结论可得

对于一个个体平均生殖个数为 $m>1$ 的 G-W 树上的 λ − 有偏随机游动 $\{X_n:n\geqslant 0\}$ 而言:当 $\lambda>m$ 时,对几乎所有的 GW − 树 T, λ − 有偏随机游动 $\{X_n:n\geqslant 0\}$ 是正常返的;当 $\lambda=m$ 时,对几乎所有的 GW- 树 T, λ − 有偏随机游动 $\{X_n:n\geqslant 0\}$ 是零常返的;当 $\lambda<m$ 时,对几乎所有的 GW- 树 T, λ − 有偏随机游动 $\{X_n:n\geqslant 0\}$ 是暂留的。

关于变化环境中分枝树上的 $\{\lambda_n,n\geqslant 1\}$ − 有偏随机游动,我们的主要结果如下:

定理 1.1　设 $\{Y_n,n\geqslant 0\}$ 是一个上临界的变化环境中的分枝过程,设 $\{m_n,n\geqslant 1\}$ 如前所定义。给定一列实数 $\lambda_n>0(n\geqslant 1)$ 及一棵由 $\{Y_n,n\geqslant 0\}$ 决定的分枝树 T, $\{X_n,n\geqslant 0\}$ 是取值于 T 的 $\{\lambda_n,n\geqslant 1\}$ − 有偏随机游动,则有如下结论:

1)若 $\{\lambda_n,n\geqslant 1\}$ 与 $\{m_n,n\geqslant 1\}$ 满足: 存在正整数 $n>1$, 使得

$$\frac{m_2\cdots m_n}{1+\lambda_1+\lambda_1\lambda_2+\cdots+\lambda_1\cdots\lambda_{n-1}}>1$$

且

$$\frac{m_{(k-1)n+1}\cdots m_{kn}}{1+\sum_{l=1}^{n}\prod_{j=1}^{l}\lambda_{(k-1)n+j-1}}>1,k\geqslant 2,\tag{1}$$

则存在 $\mathscr{T}_0\subset\mathscr{T}$ 满足 $VGW(\mathscr{T}_0)>0$ 且任取 $T\in\mathscr{T}_0$, $P_T(\{X_n,n\geqslant 0\}$ 不返回根节点$)>0$;

2)若 $\{\lambda_n,n\geqslant 1\}$ 与 $\{m_n,n\geqslant 1\}$ 满足

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{m_1\cdots m_n}{1+\sum_{l=1}^{n-1}\prod_{j=1}^{l}\lambda_j}<\infty,\tag{2}$$

则对 VGW − a. s. T,随机游动 $\{X_n,n\geqslant 0\}$ 是正常返的(关于 P_T);

3)若对 VGW − a. s. T,随机游动 $\{X_n,n\geqslant 0\}$ 关于 P_T 是常返的,而且

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{|D_n(T)|}{1+\sum_{l=1}^{n-1}(\prod_{j=1}^{l}\lambda_j)}=\infty,\tag{3}$$

则对 VGW − a. s. T,随机游动 $\{X_n,n\geqslant 0\}$ 是零常返的(关于 P_T)。

2　主要定理的证明

命题 2.1　VGW 可唯一扩张为 $\mathscr{B}(\mathscr{T})$ 上的一个概率测度。

证明　考虑乘积空间 $\mathscr{T}^*=\mathbb{N}^U$,其中 U 如定义 1.1 设,现在任取 $u\in U,|u|=n$,记 $q^{(u)}=\{p^{(n+1)}(j):j=0,1,\cdots\}$,对任意的 $u_1,u_2,\cdots,u_n\in U,|u_i|=k_i,1\leqslant i\leqslant n$,存在唯一一个 $\mathbb{N}^{*n}$ 上的乘积测度 $\times_{i=1}^{n}q^{(u_i)}$,使得对 $\mathbb{N}^{*n}$ 中任意一个单点集 $\{<i_1,\cdots,i_n>\}$ 有

$$\times_{i=1}^{n}q^{(u_i)}(\{<i_1,i_2,\cdots,i_n>\})=\prod_{j=1}^{n}p^{(k_i+1)}(j).$$

容易验证这些形如 $\times_{i=1}^{n}q^{(u_i)}$ 的测度满足 Kolmogrov 相容性条件。

给定 $u\in U$,设 $\nu_u^*:\mathscr{T}^*\to\mathbb{N}$。定义 $\psi:\mathscr{T}^*\to\mathscr{T}$

如下：$\psi(\omega^*)=T$，其中树 T 上的每个节点 $u=<j_1,\cdots,j_p>,p\in\mathbb{N}$ 满足

$$j_{k+1}\leqslant\nu^*_{<j_1,\cdots,j_k>}(\omega^*),0\leqslant k<p.$$

由文献[10]中的结论知 ψ 可测。根据 Kolmogrov 相容性定理，前面满足相容性条件的测度族唯一确定 $\mathscr{T}^*$ 上的一个概率测度，记为 p_q^*，定义 $p_q=p_q^*\circ\psi^{-1}$，则 p_q 为 $\mathscr{T}^*$ 上的一个概率测度。p_q 即为 VGW 的唯一扩张。 □

通篇假定对于任意的 $n\geqslant1$，

$$m_n=\sum_{k\geqslant1}kp^{(n)}(k)>1,$$

则变化环境中的分枝树关于上述测度 VGW 几乎必然不是有限树。本文中将概率测度 VGW 决定的数学期望记为 E_{VGW}。

受文献[9]中方法的启发，我们用变化环境中的分枝树的生殖规律与有偏随机游动的有偏参数的性质讨论状态分类。沿用文献[11]中使用的测度定义体系，严格给出了状态分类定理的证明。

为证明定理 1.1，首先需要下面一个引理。因为我们没有在文献中找到这一结果的证明，所以将详细的证明陈述如下。

引理 2.1 设 $\{S_t:t\geqslant0\}$ 是取值于 $\mathbb{N}$ 上的时齐马氏链，给定 $0<p_t<1,t\geqslant1,S_t$ 转移概率如下：

$$P(S_{t+1}=1\mid S_t=0)=1=p_0,$$

$$P(S_{t+1}=n+1\mid S_t=n)=p_n,$$

$$P(S_{t+1}=n-1\mid S_t=n)=1-p_n:=q_n.$$

设 B 为 $\mathbb{N}$ 的非空子集，定义

$$\tau_B=\inf\{k\geqslant0:S_k\in B\},$$

特别地，记

$$\tau_j=\tau_{\{j\}},j\in\mathbb{N},$$

又记

$$\delta_j=\frac{q_j}{p_j},j\geqslant1,$$

则有

$$P(\tau_0>\tau_{n+1}\mid S_0=1)=1/[\sum_{k=1}^{n}(\prod_{j=1}^{k}\delta_j)+1],n\geqslant1,$$

特别地，当 $p_n=q_n=1/2$（其中 $n\geqslant1$）时，$p(\tau_0>\tau_{n+1}\mid S_0=1)=1/(n+1)$，$p_n\equiv p,q_n\equiv q=1-p,p\neq q$ 时，这就是一个经典的赌徒输光问题，$p(\tau_0>\tau_{n+1}\mid S_0=1)=\dfrac{q/p-1}{(q/p)^{n+1}-1}$，这些结果均与经典结果吻合[1]。

证明

记 $\tau_i^{(j)}=\inf\{t\geqslant j:S_t=i\}$，则 $\tau_i^{(0)}=\tau_i$。

记 $a_k=P(\tau_0>\tau_{n+1}\mid S_0=k),k\geqslant0$。

首先有

$$a_0=P(\tau_0>\tau_{n+1}\mid S_0=0)=0,$$

$$a_{n+1}=P(\tau_0>\tau_{n+1}\mid S_0=n+1)=1,n\geqslant1.$$

对于任意的 $0<k\leqslant n$，有

$$P(\tau_0>\tau_{n+1}\mid S_0=k)=P(\tau_0^{(1)}>\tau_{n+1}^{(1)}\mid S_1=k),$$

进而用马氏性进行递推得

$$a_k=P(\tau_0>\tau_{n+1}\mid S_1=k+1)P(S_1=k+1\mid S_0=k)+P(\tau_0>\tau_{n+1}\mid S_1=k-1)P(S_1=k-1\mid S_0=k)=p_ka_{k+1}+q_ka_{k-1},$$

由上式得

$$a_{k+1}-a_k=\frac{q_k}{p_k}(a_k-a_{k-1})=\delta_k(a_k-a_{k-1}),\quad 0<k<n+1.$$

进而

$$a_{k+1}-a_k=(\prod_{j=1}^{k}\delta_j)a_1,0<k<n+1,$$

于是

$$1=a_{n+1}-a_0=\sum_{k=0}^{n}(a_{k+1}-a_k)=\sum_{k=1}^{n}(\prod_{j=1}^{k}\delta_j)a_1+a_1,$$

最后

$$[\sum_{k=1}^{n}(\prod_{j=1}^{k}\delta_j)+1]a_1=1,$$

引理得证。 □

定理 1.1 的证明：

先证明 1）。设：$\overline{X}_n(T,\omega):(\mathscr{T}\times\Omega,\mathscr{B}(\mathscr{T})\times\mathscr{F})\to(U,\mathscr{G}),n\geqslant1$，$\overline{X}_0=o$，$o$ 为 T 的根。$\overline{X}_n(T,\omega)$ 取值于 T 上的节点而且每经过一个时刻移动至 T 上与之相邻的节点，固定 T，$\{\overline{X}_n(T),n\geqslant0\}$ 是 T 上的 $\{\lambda_n\}$ - 有偏随机游动（关于 P_T）。定义

$$\tau(T,\omega)=\inf\{j\geqslant1:\overline{X}_j(T,\omega)=o\};$$

其中 o 是 T 的根，对于 $v\neq o$ 定义

$$T_v(T,\omega)=\begin{cases}\inf\{k\geqslant0:\overline{X}_k=v\}, & v\in T,\\ \infty, & v\notin T;\end{cases}$$

$$H_v(T,\omega)=\begin{cases}\inf\{k\geqslant T_v:\overline{X}_k=\overleftarrow{v}\}, & v\in T,\\ \infty, & v\notin T.\end{cases}$$

在 $\mathscr{B}(\mathscr{T})\times\mathscr{F}$ 上定义概率测度如下

$$\overline{P}(A)=\int_{\mathscr{T}}P_T(A(T))\mathrm{d}VGW(T),$$

其中 $A\in\mathscr{B}(\mathscr{T})\times\mathscr{F}$，$A(T)$ 是截集。

为证结论 1），只需证明：对于 VGW - a. s. T，$\{\overline{X}_n,n\geqslant0\}$ 是暂留的（关于 P_T），亦即，对 VGW - a. s. T，$\{\overline{X}_n,n\geqslant0\}$ 在时间 $\tau(T)$ 之前以正概率访

问了无穷多个 T 上的节点。

谬设 $\overline{P}(\tau<\infty)=1$，此即对 VGW - a.s. T，$P_T(\tau(T)<\infty)=1$。

设 n 是满足(1)的正整数，$n>1$。给定树 T，满足 $P_T(\tau(T)<\infty)=1$。对于树 T 上第 n 层的任一节点 v，若过程 $\{\overline{X}_n(T),n\geqslant 0\}$ 于时刻 $\tau(T)$ 之前访问它，则将之涂成白色，以 Γ_1 记第 n 层全体白点的个数。对于 $k\geqslant 2$，若 T 上 $(k-1)n$ 层的白点依次标记为 $v_1,v_2,\cdots,v_j$，以 $V_{k,i}$ 记 v_i，位于第 kn 层的白色后代的个数（v_i 位于第 kn 层的某后代被涂为白色当且仅当 $\{\overline{X}_n(T),n\geqslant 0\}$ 于时刻 H_{v_i} 之前访问它）。我们还假定 T 上其他层的节点绝不涂成白色。

由上述规则知道，kn 层的白色节点的位于 $(k-1)n$ 层的祖先一定是白色的 $(k\geqslant 2)$。以 Γ_k 记第 kn 层全体白点的个数。于是

$$\Gamma_{k+1}=\sum_{j=1}^{\Gamma_k}V_{k+1,j},k\geqslant 0,$$

$\Gamma_0=1$，Γ_1 是 T 上第 n 层的白点个数。

上式定义的 $\{\Gamma_k,k\geqslant 0\}$ 是 $\mathscr{T}\times\Omega$ 上一个依赖于代的分枝过程。现在考虑 $V_{k+1,j}$ 的均值（关于 $\overline{P}$）。设 v 是 T 的根 o 的某一个孩子，即 $|v|=1$，又设 $P_T(T_v(T)<\infty)>0$。由于 $P_T(\tau(T)<\infty)=1$，故

$$P_T(H_v(T)<\infty\mid T_v(T)<\infty)=1.$$

设 u 是 v 的位于树 T 上第 n 层的后代，且于 H_v 之前被 $\{\overline{X}_n(T),n\geqslant 0\}$ 访问过。记 $\{\overline{X}_n(T),n\geqslant 0\}$ 从 v 至 u 的最短路径为 $u_1u_2\cdots u_n$，其中 u_{i+1} 是 u_i 的孩子，$u_1=v,u_n=u$。我们称 $\{\overline{X}_n(T),n\geqslant 0\}$ 从 u_i 有效下行至 u_{i+1} 当且仅当在 H_v 之前 $\{\overline{X}_n(T),n\geqslant 0\}$ 从 u_i 一步移至 u_{i+1} 或从 u_i 一步移至与 u_{i+1} 同层的其他某节点 w，然后沿 w 的后代逐步下移并于 H_v 之前再回到 u_i，然后从 u_i 一步移至 u_{i+1}，类似地可以定义 $\{\overline{X}_n(T),n\geqslant 0\}$ 从 u_i 有效上行至 u_{i-1}。将 T 上与 u_{i+1} 同层的其他节点编号为：$\bar{u}_1,\cdots,\bar{u}_{d_{u_i}-1}$。以 $p(u_i,\bar{u}_j)$ 记 $\{\overline{X}_n(T),n\geqslant 0\}$ 从 u_i 出发沿 $\bar{u}_j$ 之后代节点先向下移然后上移于 H_v 之前回到 $\bar{u}_i$ 的概率。根据有偏随机游动的定义 $p(u_i,\bar{u}_j)$ 与 $\bar{u}_j$ 无关，而且 $\{\overline{X}_n(T),n\geqslant 0\}$ 位于 u_i 时或者上行或者下行，总之若记下行概率为 p_i，上行概率为 q_i，则

$$p_i+q_i=1,$$

且

$$p_i=\frac{1}{\lambda+d_{u_i}}(1+(d_{u_i}-1)p(u_i,\bar{u}_j)),$$

$$q_i=\frac{\lambda}{\lambda+d_{u_i}}(1+(d_{u_i}-1)p(u_i,\bar{u}_j)),$$

于是 $p_i=\dfrac{1}{1+\lambda},q_i=\dfrac{\lambda}{1+\lambda}$。

以 u_0 记根节点 o，$\{\overline{X}_n(T),n\geqslant 0\}$ 沿 $u_0u_1\cdots u_n$ 移动可以看成一个广义的赌徒输光问题，此时引理 2.1 所定义的 $\{S_n,n\geqslant 0\}$ 从 i 移至 $i+1$ 可看成 $\{\overline{X}_n(T),n\geqslant 0\}$ 从 u_i 有效下行至 u_{i+1}，$\{S_n,n\geqslant 0\}$ 从 i 移至 $i-1$ 可看成 $\{\overline{X}_n(T),n\geqslant 0\}$ 从 u_i 有效上行至 u_{i-1}，而输光概率 $P(\tau_0>\tau_n\mid S_0=1)$ 即是 $\{\overline{X}_n(T),n\geqslant 0\}$ 于 H_v 之前击中 u 的概率，故由引理 2.1 知

$$P_T[\{\overline{X}_n(T)\}\text{ 于 }H_v\text{ 前击中 }u\mid T_v<\infty]=\frac{1}{1+\lambda_1+\lambda_1\lambda_2+\cdots+\lambda_1\cdots\lambda_{n-1}}=:\eta_n.$$

以 $|D_n(T,v)|$ 记 v 的位于 T 上第 n 层的全体后代个数，则

$$E_{\overline{P}}(v\text{ 在第 }n\text{ 层的后代个数}\mid T_v<\infty)=E_{VGW}(|D_n(T,v)|\cdot\eta_n)=\frac{m_2\cdots m_n}{1+\lambda_1+\lambda_1\lambda_2+\cdots+\lambda_1\cdots\lambda_{n-1}},$$

而根的后代至少有一个（以概率 1），且于 τ 之前被 $\{\overline{X}_n(T),n\geqslant 0\}$ 击中的至少有一个（以概率 1），故

$$E_{\overline{P}}(\Gamma_1)\geqslant\frac{m_2\cdots m_n}{1+\lambda_1+\lambda_1\lambda_2+\cdots+\lambda_1\cdots\lambda_{n-1}}.\tag{4}$$

现在任取 T 上第 $(k-1)n$ 层的一个节点 $v'(k\geqslant 2)$，设 $P(T_v<\infty)>0$。又任取 v 在 T 上位于第 kn 层的一个后代 u'。从 v' 到 u' 的最短路径为 $v_1v_2\cdots v_{n+1}$，其中 v_{i+1} 是 v_i 的孩子，$v_1=v',v_{n+1}=u'$。类似于前面的讨论，我们得到：$\{\overline{X}_n,n\geqslant 0\}$ 在 $H_{v'}$ 之前击中 u' 的概率即是输光概率 $P(\tau_0>\tau_{n+1}\mid S_0=1)$，亦即 $\dfrac{1}{1+\sum_{l=1}^{n}\prod_{j=1}^{l}\lambda_{(k-1)n+j-1}}$，故 v' 位于 T 的第 kn 层在 $H_{v'}$ 之前被击中的后代的总个数之期望（关于 $\overline{P}$）为

$$\frac{m_{(k-1)n+1}\cdots m_{kn}}{1+\sum_{l=1}^{n}\prod_{j=1}^{l}\lambda_{(k-1)n+j-1}},\tag{5}$$

事实上，这正是 $E_{\overline{P}}(V_{k,j})$。

现在根据 1）可知，$E_{\overline{P}}(\Gamma_1)>1,E_{\overline{P}}(V_{k,j})>1,\forall k,\forall j.$ 这说明过程 $\{\Gamma_k,k\geqslant 0\}$ 是一个上临

界的依赖于代的分枝过程，因此

$$\bar{P}(\lim_{k\to\infty}\Gamma_k = \infty) > 0, \qquad (6)$$

给定 T,设 $B = \{\{\bar{X}_n(T), n\geq 0\}$ 在 $\tau(T)$ 之前访问了树 T 上的无穷多个节点$\}$。根据式(6),存在$\mathscr{T}$的可测子集 $\mathscr{T}_0$ 使得 $VGW(\mathscr{T}_0) > 0$ 且对每个 $T\in\mathscr{T}_0$, 总有

$$P_T(B) > 0,$$

此即 $\bar{P}(\tau = \infty) > 0$, 矛盾,1)得证。

其次证明2)。给定 $k\geq 2$,对于第k层的任一节点 v,事件$\{T_v < \tau\}$ 发生,必然使得$\bar{X}_1$ 为 v 之祖先且$\{\bar{X}_n(T), n\geq 0\}$ 于τ之前击中v, 根据前面的计算有

$$P_T(T_v < \tau) \leq \frac{1}{1+\lambda_1+\lambda_1\lambda_2+\cdots+\lambda_1\cdots\lambda_{k-1}},$$

因此第 k 层于时刻τ之前被击中的节点数的期望(关于 $\bar{P}$) 至多为

$$\frac{m_1\cdots m_k}{1+\lambda_1+\lambda_1\lambda_2+\cdots+\lambda_1\cdots\lambda_{k-1}}.$$

给定 T,设$L = \{X_n, n\geq 0\}$ 在$\tau(T)$ 之前所抵达的最大层数, 注意

$$E_T(L\mid\tau(T)) = \frac{1}{2}\tau(T),$$

由于对 VGW − a.s. T, $|D_n(T)|\geq 1$, 故

$$E_T(L\mid\tau(T)) \leq E_T(\{X_n, n\geq 0\}\text{ 在 }\tau(T)\text{ 前击中的节点数}\mid\tau(T)),$$

总之

$$E_{\bar{P}}(\tau) \leq 2E_{\bar{P}}(\{\bar{X}_n, n\geq 0\}\text{ 在 }\tau\text{ 前击中的节点数})$$

$$\leq 2m_1 + 2\sum_{k=2}^{\infty}\frac{m_1\cdots m_k}{1+\lambda_1+\lambda_1\lambda_2+\cdots+\lambda_1\cdots\lambda_{k-1}},$$

由 2) 知 $E_{\bar{P}}(\tau) < \infty$, 因此对 VGW − a.s. T, $E_T(\tau) < \infty$,此即对 VGW − a.s. T, $\{X_n, n\geq 0\}$ 在 T 上关于 P_T 是正常返的。

最后证明 3)。事实上要证 3), 只需要证明对 VGW − a.s. T, $E_T[\tau(T)] = \infty$。根据第一部分的证明知：对于 VGW − a.s. T,在τ之前第k层($k\geq 2$) 被$\{X_n, n\geq 0\}$ 击中的节点个数的期望(关于 P_T) 是

$$\frac{|D_k(T)|}{1+\sum_{l=1}^{k-1}(\prod_{j=1}^{l}\lambda_j)},$$

给定 T,对每个 ω,$\tau(T,\omega)$ 大于或等于$\{X_n, n\geq 0\}$ 在$\tau(T,\omega)$ 之前于树 T 上击中的节点数, 故

$$E_T(\tau(T)) \geq \sum_{k=2}^{\infty}\frac{|D_k(T)|}{1+\sum_{l=1}^{k-1}(\prod_{j=1}^{l}\lambda_j)},$$

由 3)知, 对 VGW − a.s. T, $E_T(\tau(T)) = \infty$。因此随机游动$\{X_n, n\geq 0\}$ 在 T 上关于 P_T 是零常返的。 □

注 2.1 当 $E_{VGW}\left(\left[\frac{m_1\cdots m_n}{|D_n(T)|}\right]^2\right)\leq C < \infty$, $\lambda_n = m_{n+1}$, $n\geq 1$, 而且对 VGW − a.s. T, 随机游动$\{X_n, n\geq 0\}$ 在 T 上是常返的, 则对于 VGW − a.s. T, $\{X_n, n\geq 0\}$ 在 T 上有可能是零常返的。事实上, 对任意的 $0 < \epsilon < 1$,

$$VGW\left(|D_k(T)|\leq \frac{m_1\cdots m_k}{k^{\frac{1}{2}(1+\epsilon)}}\right) \leq \frac{1}{k^{1+\epsilon}}E_{VGW}\left[\frac{m_1\cdots m_k}{|D_k(T)|}\right]^2, \leq \frac{C}{k^{1+\epsilon}},$$

由 Borel-Cantelli 引理可知, 对于 VGW − a.s. T,当 $k\geq k_0 = k_0(T)$ 时, $|D_k(T)|\geq \frac{m_1\cdots m_k}{k^{\frac{1}{2}(1+\epsilon)}}$, 故

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{|D_n(T)|}{1+\sum_{l=1}^{n-1}(\prod_{j=1}^{l}\lambda_j)} \geq K\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{m_1\cdots m_n}{1+m_1+\cdots+m_1\cdots m_{n-1}}\cdot\frac{1}{n^{\frac{1}{2}(1+\epsilon)}}\right), \qquad (7)$$

其中 K 是依赖于 T 的正数。现在取 $m_n = \left(1+\frac{1}{n(\log n)^2}\right)m$, $n\geq 2$, $m_1 = m_2$, $\frac{3}{2}\geq m > 1$, 则 $m_1\cdots m_{n-1}\approx m^{n-1}\log n$, $n\to\infty$, 因此

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{|D_n(T)|}{1+\sum_{l=1}^{n-1}(\prod_{j=1}^{l}\lambda_j)} \geq \tilde{K}\sum_{n=2}^{\infty}n^{-\frac{1}{2}(1+\epsilon)}, = \infty, \qquad (8)$$

上式中 $\tilde{K}$ 仅依赖于 T,故由定理 1.1 之 3) 知此时随机游动$\{X_n, n\geq 0\}$ 在 T 上是零常返的(上述随机游动不满足 1)、2), 构造是合理的)。

注 2.2 考虑经典分枝树上的 λ_n − 有偏随机游动$\{X_n, n\geq 0\}$,假设分枝树的平均生殖个数为 $m\in(1,\frac{3}{2}]$, $\lambda_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)m$, $E_{GW}\left(\left[\frac{m^n}{|D_n(T)|}\right]^2\right)\leq D < \infty$, $\forall n\geq 1$,此时 1) 和 2) 均不满足, 因此在不会引起矛盾的情况下, 我们可以找到满足上述条件的 λ_n − 有偏随机游动$\{X_n, n\geq 0\}$, 对于 G-W-a.s. T, 随机游动在 T 上是常返的, 进一步经过类似于式(7) 和式(8) 的计算, 可知$\{X_n, n\geq 0\}$ 是零常返的。

注 2.3 根据注 2.1 和注 2.2, 当 $\lambda_n = m_{n+1}(n\geq 1)$ 时或 $\lambda_n\downarrow m$ 时,可以考虑变化环境中

分枝树上的中心极限定理。我们猜测有类似于文献[11]中的结论。

参考文献

[1] 威廉·费勒. 概率论及其应用[M]. 3 版. 胡迪鹤 译. 北京：人民邮电出版社，2006.

[2] Zeitouni O. Random walks in random environment, XXXI Summer school in probability, St Flour. [J] Lecture notes in Math, 2004, 1837: 193-312.

[3] Révész P. Random Walk in Random and Non-Random Environments[M]. 2nd ed. Hackensack and New York: World Scientific Publishing Co Pte Ltd, 2005.

[4] Wolfgang W. Random walk on infinite graphs and groups [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2000.

[5] Polya G. Über eine Anfgabe der Wahrscheinlichkeitsrechnung betref fend die Irrfahrt im Strassennetz[J]. Mathematische Annalen, 1921, 84: 149-160.

[6] Doyle P, Snell J L. Random walks and electric networks[J]. American Mathematical Monthly, 2000, 26(4): 595-599.

[7] Lyons R. Random walks and percolation on trees[J]. Ann Probab, 1990, 18: 931-958.

[8] Peres Y, Zeitouni O. A central limit theorem for biased random walks on Galton-Watson trees[J]. Probab Theory Realated Fields, 2008, 140(3/4): 595-629.

[9] Collevecchio A. On the Transience of processes defined on Galton-Watson trees[J]. Ann Probab, 2006, 34: 870-878.

[10] Neveu J. Arbres et processus de Galton-Watson[J]. Ann Inst H Poincaré Probab Stastist, 1968, 22: 199-207.

[11] Lyons R, Peres Y. Probability on trees and networks[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2016.