文章编号:2095-6134(2017)03-0273-04

双 Hilbert 变换与分数阶双 Hilbert 变换在混合范数空间上的有界性*

崔晓娜[1],燕敦验[2†]

(1 河南师范大学数学与信息科学学院, 河南 新乡 453007; 2 中国科学院大学数学科学学院, 北京 101408)

(2016 年 6 月 6 日收稿; 2016 年 7 月 2 日收修改稿)

Cui X N, Yan D Y. Boundedeness of double Hilbert transform and fractional double Hilbert transform on mixed Lebesgue spaces[J]. Journal of University of Chinese Academy of Sciences, 2017,34(3):273-276.

摘　要　研究双 Hilbert 变换在边界情况的具有混合范数 Lebesgue 空间上、分数阶双 Hilbert 变换在一般的具有混合范数 Lebesgue 空间上和在一种混合范数边界情况等 3 类有界性问题.

关键词　双 Hilbert 变换; 分数阶双 Hilbert 变换; 混合范数

中图分类号:O171　　**文献标志码:**A　　**doi:**10. 7523/j. issn. 2095-6134. 2017. 03. 001

Boundedness of double Hilbert transform and fractional double Hilbert transform on mixed Lebesgue spaces

CUI Xiaona[1], YAN Dunyan[2]

(1 *College of Mathematics and Information Science*, *Henan Normal University*, *Xinxiang* 453007, *Henan*, *China*;
2 *School of Mathematical Sciences*, *University of Chinese Academy of Sciences*, *Beijing* 101408, *China*)

Abstract　In this work, we investigate the boundedness of the double Hilbert transform on the endpoint of the mixed-norm Lebesgue spaces. We also give the boundedness of the fractional double Hilbert transform on mixed Lebesgue spaces for the general cases, and then especially on one kind of endpoint cases.

Keywords　double Hilbert transform; fractional double Hilbert transform; mixed-norm

Benedek 和 Panzone 在文献[1]中,对于 n 元数组 $P=(p_1,p_2,\cdots,p_n)$,其中对任意的 $i=1,2,\cdots,n$, $1\leqslant p_i\leqslant\infty$, 引入具有混合范数空间 $L^P(X)$。一个在乘积空间 $(X,S,\mu)=(\prod_{i=1}^n X_i,\prod_{i=1}^n S_i,\prod_{i=1}^n \mu_i)$ 里可测的函数 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 满足,依次对变量 x_1 取 p_1 阶范数,对 x_2 取 p_2 阶范数,$\cdots$, 对 x_n 取 p_n 阶范数所得的数值是有限时,我们称该函数属于空间 $L^P(X)$。

具有混合范数的 Lebesgue 空间是一般 $L^p(\mathbb{R})$ 函数空间的很自然的延伸空间。当考虑函数对不同的变量(比如空间变量和时间变量)有不同的性质时,自然需要具有混合范数的函数空间。这些空间在研究依赖时间的偏微分方程里占有重要的角色。许多文献已经研究了不同算子在该类函数空间上的性质[2-7]。

Benedek 和 Panzone[1] 研究具有混合范数

* 国家自然科学基金(11471309,11271162,11561062)资助
† 通信作者,E-mail:ydunyan@ ucas. ac. cn

Lebesgue 函数空间的一般性质和一些插值定理；还研究势算子在高维具有混合范数函数空间上的有界性问题，并对于 $1 \leqslant p_i \leqslant 2$, $i = 1,2$ 的情况，给出在混合范数空间上的 Hausdorff-Young 定理。基于 Benedek 和 Panzone 提出的混合范数空间，Fernandez[6] 研究具有乘积核的向量值奇异积分算子在具有混合范数空间 $L^P(\mathbb{R}^2)$, $P = (p_1, p_2)$, $1 < p_1, p_2 < \infty$ 上的有界性，并指出双 Hilbert 变换是该奇异积分算子的一种特殊情况。但是，对于双 Hilbert 变换在具有混合范数空间的端点情况的有界性，到目前为止还没有相应的结果。

本文主要致力于研究双 Hilbert 变换作用在一类具有混合范数空间端点情况的有界性，该类空间我们限制在 $p_1 = 1$ 且 $1 < p_2 < \infty$。进一步，我们给出分数阶双 Hilbert 变换在具有混合范数空间的一般情况时的有界性，并给出在一类端点情况时的有界性。

1 双 Hilbert 变换

这一部分，我们研究如下定义的双 Hilbert 变换，对任意的 $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$Tf(x,y) = \text{p. v.} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{f(s,t)}{(x-s)(y-t)} \mathrm{d}s\mathrm{d}t. \quad (1)$$

首先，定义具有混合范数的 Bededek-Panzone 函数空间 $L_x^p L_y^q$, $1 \leqslant p,q < \infty$[1,4,8-9]。一个函数 $f \in L_x^p L_y^q$，当且仅当它满足

$$\|f\|_{L_x^p L_y^q} := \left(\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x,y)|^p \mathrm{d}x\right)^{q/p} \mathrm{d}y\right)^{1/q} < \infty.$$

以下在不引起混淆的情况下，简洁地记 $L_x^p L_y^q$ 为 $L^p L^q$。

Fernandez[6] 研究具有乘积核的向量值奇异积分算子的性质。特殊地，证得双 Hilbert 变换是从空间 $L^{p_1} L^{p_2}$ $(1 < p_1, p_2 < \infty)$ 到自身的有界性。在本部分，我们对于具有混合范数的端点情况，给出双 Hilbert 变换是从 $L^q L^1$ 到 $L^q L^{1,\infty}$, $1 < q < \infty$ 有界的。其中 $L^q L^{1,\infty}$ 为 $L^q L^1$ 关于第 2 个变量的弱空间，它的构成元素 f 是可测函数，且满足

$$\|f\|_{L^q L^{1,\infty}} = \sup_{\lambda > 0} \lambda m(\{x \in \mathbb{R} : \|f(\cdot, x)\|_{L^q} > \lambda\}) < \infty,$$

其中 $m(E)$ 为集合 E 上的 Lebesgue 测度。为证得双 Hilbert 变换在混合范数的边界情况上的有界性结果，我们需要一个向量值奇异积分算子的引理，摘述该引理如下[5,8-10]。

引理 1.1 设 $K = K(x,y)$ 是一个核，它定义在 $x \neq y$ 上，取值在 $L(B)$ 上，其中 $L(B)$ 为 Banach 空间 B 上的有界线性算子的集合。并对某一个 q, $1 < q < \infty$，设 $\vec{T}$ 是与核 K 相关的在 $L^q(\mathbb{R}, B)$ 上有界的一个算子

$$\vec{T}f(x) = \int_{\mathbb{R}} K(x,y) f(y) \mathrm{d}y, \ x \notin \operatorname{supp}(f).$$

而且核 K 满足以下 2 个条件

$$\|K(x,y)\|_{L(B)} \leqslant C|x-y|^{-1}, \quad (2)$$

和

$$\|K(x+h,y) - K(x,y)\|_{L(B)} + \|K(x,y+h) - K(x,y)\|_{L(B)} \leqslant C \frac{|h|^\delta}{|x-y|^{1+\delta}}, \quad (3)$$

其中 $\delta \in (0,1]$, $|x-y| \geqslant 2|h|$。则有算子 $\vec{T}$ 是从 $L^p(B)$ $(1 < p < \infty)$ 到自身是有界的，而且算子 $\vec{T}$ 也是弱 $(1,1)$ 的，也即是说

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : \|\vec{T}f(x)\|_B > \lambda\}| \leqslant \frac{C}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^n} \|f(x)\|_B \mathrm{d}x = \frac{C}{\lambda} \|f\|_{L^1(B)},$$

其中

$$\|f\|_{L^p(B)} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} \|f(x)\|_B^p \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}, 1 \leqslant p < \infty.$$

当 $p = \infty$ 时，只需对上式做关于 L^∞ 定义上的调整即可。

文献 [6] 已经给出双 Hilbert 变换的 $L^p(\mathbb{R}^2)$ 有界性。下面考虑该算子在边界情况的混合范数下的有界性。

定理 1.1 由式(1)定义的双 Hilbert 变换是从函数空间 $L^q L^1$ 到函数空间 $L^q L^{1,\infty}$, $1 < q < \infty$ 有界的。也即是说，存在一个常数 C，有下式成立

$$\|Tf\|_{L^q L^{1,\infty}} \leqslant C \|f\|_{L^q L^1}. \quad (4)$$

证明 算子 T 为双 Hilbert 变换时，其核为 $K(x,y,s,t) = \dfrac{1}{(x-s)(y-t)}$。当 $x \neq s$ 时，我们定义核 k 为

$$(k(x,s)h)(y) = \int_{\mathbb{R}} K(x,y,s,t) h(t) \mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(x-s)(y-t)} h(t) \mathrm{d}t = \frac{1}{x-s} \int_{\mathbb{R}} \frac{h(t)}{y-t} \mathrm{d}t.$$

另外，记 $F(x)(y) = f(x,y)$，且

$$TF(x)(\cdot) = Tf(x, \cdot).$$

这样，双 Hilbert 变换可以改写为

$$TF(x)(\cdot) = \int_{\mathbb{R}^2} K(x, \cdot, s, t) f(s,t) \mathrm{d}s\mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}} (k(x,s)F(s))(\cdot) \mathrm{d}s.$$

选取引理 1.1 中的 Banach 空间 B 为 $L^q(\mathbb{R})$, $1 <$

$q < \infty$。对于 $x \neq s$, 估计算子 $k(x,s)$ 从空间 $L^q(\mathbb{R})$ 到空间 $L^q(\mathbb{R})$ 的范数如下

$$\|k(x,s)\|_{L^q\to L^q} = \sup_{\|g(y)\|_{L^q(\mathbb{R})}\neq 0}\frac{\|(k(x,s)g)(y)\|_{L^q(\mathbb{R})}}{\|g(y)\|_{L^q(\mathbb{R})}} \leqslant C|x-s|^{-1},$$

其中的常数 C 依赖于 Hilbert 变换从空间 $L^q(\mathbb{R})$ 到空间 $L^q(\mathbb{R})$ 有界的最佳常数。这样我们证得算子 $k(x,s)$ 满足条件 (2)。

考虑到 $|x-s|\geqslant 2|h|$, 有

$$(k(x+h,s)-k(x,s))g(y) = \int_{\mathbb{R}}\left[\frac{1}{(x-s)(y-t)}-\frac{1}{(x+h-s)(y-t)}\right]g(t)\mathrm{d}t = \frac{h}{(x-s)(x+h-s)}\int_{\mathbb{R}}\frac{1}{y-t}g(t)\mathrm{d}t.$$

对上述算子求范数,得到

$$\|k(x+h,s)-k(x,s)\|_{L^q(\mathbb{R})\to L^q(\mathbb{R})} \leqslant C\frac{|h|}{|(x-s)(x+h-s)|}. \tag{5}$$

结合式子 $|x-s|\geqslant 2|h|$ 即 $|h|\leqslant\frac{|x-s|}{2}$, 推得

$$|x-s+h|\geqslant ||x-s|-|h||\geqslant\frac{|x-s|}{2}. \tag{6}$$

将式(6)代入式(5), 有

$$\|k(x+h,s)-k(x,s)\|_{L^q(\mathbb{R})\to L^q(\mathbb{R})} \leqslant 2C\frac{|h|}{|x-s|^2} \tag{7}$$

成立。同样地,也有如下式子成立

$$\|k(x,s+h)-k(x,s)\|_{L^q(\mathbb{R})\to L^q(\mathbb{R})} \leqslant 2C\frac{|h|}{|x-s|^2}. \tag{8}$$

综合考虑式(7)和式(8), 推得核函数 $k(x,s)$ 也满足式(3),并取其中的 $\delta = 1$。这样我们验证了核函数 $k(x,s)$ 满足引理 1.1 中的 2 个条件,从而有

$$|\{x\in\mathbb{R}: \|Tf(x)\|_{L_y^q}>\lambda\}| \leqslant \frac{C}{\lambda}\int_{\mathbb{R}^d}\|f(x)\|_{L_y^q}\mathrm{d}x = \frac{C}{\lambda}\|f\|_{L^qL^1}$$

成立,这就意味着式(4)成立。

2　分数阶双 Hilbert 变换

在这一部分,我们研究分数阶双 Hilbert 变换在具有混合范数 Lebesgue 空间下的有界性。对于任意的 $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, 先给出分数阶双 Hilbert 变换的定义如下:

$$H_1^{\alpha_1}H_2^{\alpha_2}f(x,y) = \mathrm{p.v.}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}\frac{f(s,t)}{|x-s|^{\alpha_1}|y-t|^{\alpha_2}}\mathrm{d}s\mathrm{d}t, \tag{9}$$

其中 $0<\alpha_i<1, i=1,2$。

为研究分数阶双 Hilbert 变换在具有混合范数函数空间上的有界性,下面先给出 Riesz 位势算子的定义和关于该算子有界性的著名的 Sobolev 定理。

定义 2.1　对任意的 $x\in\mathbb{R}^n$, Riesz 位势算子[11]由以下定义给出

$$I_\alpha(f)(x) = \frac{1}{\gamma(\alpha)}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}}\mathrm{d}y,$$

其中参数 $0<\alpha<n$, 常数

$$\gamma(\alpha) = \pi^{\frac{n}{2}}2^\alpha\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)\Big/\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right).$$

该算子的 Sobolev 定理[1]如下:

若 $f\in L^p(\mathbb{R}^n)$, $g\in L^{q'}(\mathbb{R}^n)$, $0<\alpha<n$, $\frac{1}{p}-\frac{1}{q}=\frac{\alpha}{n}$, $\frac{\alpha}{n}<\frac{1}{p}<1$, 则双线性泛函 L 有如下结果成立:

$$L(f,g) = \gamma(\alpha)\int_{\mathbb{R}^n}g(x)I_\alpha(f)(x)\mathrm{d}x = \gamma(\alpha)\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}f(x)g(y)|x-y|^{\alpha-n}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \leqslant C(n,\alpha,p)\|f\|_p\|g\|_{q'}. \tag{10}$$

基于 Sobolev 定理,我们给出分数阶双 Hilbert 变换(9)在具有混合范数 Lebesgue 空间上的有界性定理。

定理 2.1　设函数 $f\in L^{p_1}L^{p_2}$, $1<p_i<\infty$, 满足 $\frac{1}{p_i}-\frac{1}{q_i}=1-\alpha_i, i=1,2$。则有

$$\|H_1^{\alpha_1}H_2^{\alpha_2}f\|_{L^{q_1}L^{q_2}} \leqslant C\|f\|_{L^{p_1}L^{p_2}},$$

其中常数 C 只依赖于 p_i, q_i, $i=1,2$。

证明　对任意的 $g\in L^{q_1'}L^{q_2'}$, 运用上述 Sobolev 定理 (10)式,有

$$\left|\int_{\mathbb{R}^2}H_1^{\alpha_1}H_2^{\alpha_2}f(x,y)g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right| = \left|\int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^2}\frac{f(s,t)}{|x-s|^{\alpha_1}|y-t|^{\alpha_2}}g(x,y)\mathrm{d}s\mathrm{d}t\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right| \leqslant$$

$$\int_{\mathbb{R}^2}\left(\int_{\mathbb{R}^2}|f(s,t)\|g(s,t)\||x-s|^{-\alpha_1}\mathrm{d}s\mathrm{d}x\right)|y-t|^{-\alpha_2}\mathrm{d}t\mathrm{d}y \leqslant$$

$$C(\alpha_1,p_1,q_1)\int_{\mathbb{R}^2}\|f(\cdot,t)\|_{L^{p_1}}\|g(\cdot,y)\|_{L^{q_1'}}|y-t|^{-\alpha_2}\mathrm{d}t\mathrm{d}y$$

$$\leqslant C(\alpha_1,p_1,q_1)C(\alpha_2,p_2,q_2)\|f\|_{L^{p_1}L^{p_2}}\|g\|_{L^{q_1'}L^{q_2'}}.$$

这样就证得该定理的结论。

下面给出分数阶双 Hilbert 变换在一类边界

混合范数函数空间上的有界性。

定理 2.2 设 $f \in L^{p_1}L^1$，$1 < p_1 < \infty$，$\frac{1}{p_1} - \frac{1}{q_1} = 1 - \alpha_1$，且 $q_2 = \frac{1}{\alpha_2}$。则存在一个常数 C 使得

$$\| H_2^{\alpha_2} H_1^{\alpha_1} f \|_{L^{q_1}L^{q_2,\infty}} \leqslant C \| f \|_{L^{p_1}L^1}$$

成立。

证明 根据 Minkowski 不等式，对任意的 $(x,y) \in \mathbb{R}^2$，有

$$\| H_2^{\alpha_2} H_1^{\alpha_1} f(x,y) \|_{L_x^{q_1}} \leqslant$$
$$\left(\int_{\mathbb{R}} \left| \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{|y-t|^{\alpha_2}} \left| \int_{\mathbb{R}} \frac{f(s,t)}{|x-s|^{\alpha_1}} \mathrm{d}s \right| \mathrm{d}t \right|^{q_1} \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q_1}} \leqslant$$
$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{|y-t|^{\alpha_2 q_1}} \left| \int_{\mathbb{R}} \frac{f(s,t)}{|x-s|^{\alpha_1}} \mathrm{d}s \right|^{q_1} \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q_1}} \mathrm{d}t =$$
$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{|y-t|^{\alpha_2}} \| H_1^{\alpha_1} f(x,t) \|_{L_x^{q_1}} \mathrm{d}t \leqslant$$
$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{|y-t|^{\alpha_2}} \| f(x,t) \|_{L_x^{p_1}} \mathrm{d}t.$$

由 Riesz 位势的定义，对任意的 $y \in \mathbb{R}$，上式可以改写为

$$\| H_2^{\alpha_2} H_1^{\alpha_1} f(x,y) \|_{L_x^{q_1}} \leqslant I_{1-\alpha_2} \tilde{f}(y), \quad (11)$$

其中 $\tilde{f}(y) = \| f(\cdot,y) \|_{L^{p_1}}$。

令

$$E_\lambda = \{ y : I_{1-\alpha_2} \tilde{f}(y) > \lambda \}.$$

我们估计集合 E_λ 的测度，由自变量代换，得到

$$|E_\lambda| \leqslant \frac{1}{\lambda} \int_{E_\lambda} I_{1-\alpha_2} \tilde{f}(y) \mathrm{d}y =$$
$$\frac{1}{\lambda} \int_{E_\lambda} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{|y-t|^{\alpha_2}} \| f(x,t) \|_{L_x^{p_1}} \mathrm{d}t \mathrm{d}y =$$
$$\frac{1}{\lambda} \int_{E_\lambda} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{|t|^{\alpha_2}} \| f(x,y-t) \|_{L_x^{p_1}} \mathrm{d}t \mathrm{d}y. \quad (12)$$

分解式(12)式的内部积分，有

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{|t|^{\alpha_2}} \| f(x,y-t) \|_{L_x^{p_1}} \mathrm{d}t =$$
$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} \int_{2^{j-1} \leqslant |t| \leqslant 2^j} \frac{1}{|t|^{\alpha_2}} \| f(x,y-t) \|_{L_x^{p_1}} \mathrm{d}t \leqslant$$
$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} \frac{1}{2^{(j-1)\alpha_2}} \int_{|t| \leqslant 2^j} \| f(x,y-t) \|_{L_x^{p_1}} \mathrm{d}t.$$

进而，我们估计 $|E_\lambda|$ 的测度为

$$|E_\lambda| \leqslant \frac{1}{\lambda} \int_{E_\lambda} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \frac{1}{2^{(j-1)\alpha_2}} \int_{|t| \leqslant 2^j} \| f(x,y-t) \|_{L_x^{p_1}} \mathrm{d}t \mathrm{d}y \leqslant$$
$$\frac{1}{\lambda} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \frac{1}{2^{(j-1)\alpha_2}} \min(|E_\lambda| \, \| f \|_{L^{p_1}L^1}, 2^j \| f \|_{L^{p_1}L^1}) \leqslant$$
$$\frac{1}{\lambda} \sum_{2^j > |E_\lambda|} \frac{1}{2^{(j-1)\alpha_2}} |E_\lambda| \, \| f \|_{L^{p_1}L^1} +$$
$$\frac{1}{\lambda} \sum_{2^j \leqslant |E_\lambda|} \frac{2^j}{2^{(j-1)\alpha_2}} \| f \|_{L^{p_1}L^1} = \frac{2C}{\lambda} |E_\lambda|^{1-\alpha_2} \| f \|_{L^{p_1}L^1},$$

从而，计算得

$$|E_\lambda|^{\alpha_2} \leqslant \frac{C}{\lambda} \| f \|_{L^{p_1}L^1}.$$

也就是说，$|E_\lambda|^{\alpha_2} \leqslant \frac{2C}{\lambda}$ 成立。这就意味着

$$\sup_{\lambda > 0} \lambda |E_\lambda|^{\alpha_2} \leqslant C$$

成立。

根据弱空间 $L^{p,\infty}$ 的定义，得到

$$I_{1-\alpha_2} \tilde{f}(y) \in L_y^{\frac{1}{\alpha_2},\infty}.$$

再根据估计式 (11)，推得

$$\| H_2^{\alpha_2} H_1^{\alpha_1} f(x,y) \|_{L_x^{q_1}} \in L_y^{\frac{1}{\alpha_2},\infty}.$$

这样，就证得所需要的结论。

参考文献

[1] Benedek A, Panzone R. The space L^p with mixed norm [J]. Duke Math J, 1961, 28 (3): 301-324.

[2] Benedek A, Calderón P, Panzone R. Convolution operators on Banach space valued functions [J]. Proc Nat Acad Sci, 1962, 48: 356-365.

[3] Fefferman R, Stein E M. Singular integrals on product spaces [J]. Adv in Math, 1982, 45 (2): 117-143.

[4] Journé J L. Calderón-Zygmund operators on product spaces [J]. Rev Mat Iberoamericana, 1985, 1 (3): 55-91.

[5] Moen K. Linear and multilinear fractional operators: weighted inequalities, sharp bounds, and other properties [D]. Kansas: University of Kansas, 2009.

[6] Fernandez D L. Vector-valued singular integral operators on L^p-spaces with mixed norms and applications [J]. Pacific J Math, 1987, 129 (2): 257-275.

[7] Stefanov A, Torres R H. Calderón-Zygmund operators on mixed Lebesgue spaces and applications to null forms [J]. J London Math Soc, 2004, 70 (2): 447-462.

[8] Grafakos L. Classical Fourier analysis [M]. 2nd ed. New York: Springer-Verlag, 2008: 77-82.

[9] Stein E M, Weiss G. Introduction to Fourier analysis on Euclidean spaces [M]. New Jersey: Princeton University Press, 1971: 53-75.

[10] Duoandikoetxea J. Fourier analysis [M]. New York: American Mathematical Society, 2001: 50-69.

[11] Lu S Z, Ding Y, Yan D Y. Singular Integrals and Related Topics[M]. Beijing: World Scientific Publishing Co Pte Ltd, 2007: 144-150.