

文章编号:2095-6134(2017)05-0625-08

# 两相光滑粒子流体动力学方法在动床溃坝问题中的应用\*

乔 成<sup>1,2,3</sup>, 潘华利<sup>1</sup>, 欧国强<sup>1†</sup>

(1 中国科学院水利部成都山地灾害与环境研究所 中国科学院山地灾害与地表过程重点实验室, 成都 610041;  
2 中国科学院大学, 北京 100049; 3 安徽理工大学土木建筑学院, 安徽 淮南 232001)  
(2016 年 6 月 27 日收稿; 2016 年 10 月 17 日收修改稿)

Qiao C, Pan H L, Ou G Q. Application of two-phase smoothed particle hydrodynamics method to dam break over movable bed[J]. Journal of University of Chinese Academy of Sciences, 2017, 34(5):625-632.

**摘 要** 光滑粒子流体动力学(SPH)方法采用离散分布的粒子作为离散工具,借助粒子和核函数将场变量及其导数以某种加权求和的方式进行计算,使得该方法更适于处理包含大位移、动边界和自由表面的问题。本文在分析动床条件下的溃坝问题时,以 Drunker-Prager 准则作为底床颗粒物的侵蚀启动判断条件。满足该条件而发生启动的颗粒物将以非牛顿流体的特征发生运动,即以 Herschel-Bulkley-Papanastasiou 模型来描述;否则,认为底床颗粒物未启动而保持静止状态。为进一步改进计算结果,采用基于体积比的两相 SPH 方法描述固液混合体的动力学特征,并基于固液混合颗粒流的动力学特征对混合黏度的计算进行改进。基于上述原理,分析动床条件下的溃坝问题,并将数值计算结果与已有的实验数据进行对比,证明本文提出的混合黏度计算公式改进了数值计算结果。

**关键词** 光滑粒子流体动力学; 动床; 溃坝; 两相; 非牛顿流体

**中图分类号:**TU 443      **文献标志码:**A      **doi:**10. 7523/j. issn. 2095-6134. 2017. 05. 013

## Application of two-phase smoothed particle hydrodynamics method to dam break over movable bed

QIAO Cheng<sup>1,2,3</sup>, PAN Huali<sup>1</sup>, OU Guoqiang<sup>1</sup>

(1 Key Laboratory of Mountain Surface Process and Hazards, Institute of Mountain Hazards and Environment, Chinese Academy of Sciences, Chengdu 610041, China; 2 University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China;  
3 School of Civil Engineering and Architecture, Anhui University of Science & Technology, Huainan 232001, Anhui China)

**Abstract** Smoothed particle hydrodynamics (SPH) method adopts discrete particles for discretion of computational domain, and field variables and their spatial derivatives are evaluated by summation interpolation based on particle and kernel functions, which makes this method more suitable for processing the large displacement, movable boundary, and free surface problems. In order to analyze the dam break problem over movable bed, an erosion condition based on Drunker-Prager is used. The particles satisfying this condition will move with the non-Newtonian characteristic, i. e. ,

\* 国家自然科学基金(41372331,41672318)和中国科学院西部之光人才培养计划在职博士研究生资助项目资助  
† 通信作者, E-mail: ougq@imde. ac. cn

Herschel-Bulkley-Papanastasiou rheology, while the particles which do not satisfy the condition will remain still. In order to improve the results of numerical modelling further, a two-phase SPH method which is based on the ratio of volume is applied when modelling the dynamics of mixture, and the calculation of viscosity of mixture is improved based on the dynamic characters of solid-fluid mixture. A dam-break problem over movable bed is analyzed based on the model mentioned above. Numerical results are compared with the experimental data, and the comparison verifies that the proposed formula improves the results of numerical modelling.

**Keywords** smoothed particle hydrodynamics; movable bed; dam break; two-phase; non-Newtonian fluid

自由表面流的数值模拟分析是计算流体力学中最具挑战的问题之一。光滑粒子流体动力学 (smoothed particle hydrodynamics, SPH) 方法在处理自由表面流问题时不需要额外的方程或技术来追踪自由面的位置,并且基于拉格朗日的架构使其避免了数值耗散的出现。因此与传统的基于网格的方法相比,具有独特的优势。

光滑粒子流体动力学方法由 Gingold 和 Monaghan<sup>[1]</sup>、Lucy<sup>[2]</sup>于 1977 年分别提出,最初用于求解天体物理学问题。SPH 法基于拉格朗日粒子对空间计算域进行离散,这些粒子挟带有表征计算域特征的物理量,如质量、动量和速度等。场变量及其导数借助粒子和核函数以某种加权求和的方式进行计算,这种求和只涉及场变量及核函数的导数值,而不需要求解场变量本身的导数,因此降低了对场变量连续性的要求。

Shao 和 Lo<sup>[3]</sup>采用不可压缩 SPH 方法、基于 Cross 流变模型分析非牛顿流体在定床上的溃坝问题。Laigle 等<sup>[4]</sup>基于单相的 SPH 方法,采用 Bingham 模型分析黏性泥石流与结构间的相互作用。Manenti 等<sup>[5]</sup>在分析人工蓄水结构时引入 Mohr-Coulomb 屈服准则以及颗粒物的 Shields 原理,并对 2 个准则的敏感性进行分析。Razavitoosi 等<sup>[6]</sup>分析动床溃坝问题时,将底床颗粒物视为符合 Bingham 流变特征的非牛顿流体,底床颗粒物在动量方程中既包括依据实验结果、由速度拟合而来的人工黏度项,又包括依据剪切率张量第二部变量确定的有效黏度项。由于缺少底床颗粒物的启动判断条件,Razavitoosi 等在定义 Bingham 模型的有效黏度时,引入一个放大系数,以便能够反映底床颗粒物在未启动条件下具有很高的黏度,但该放大系数缺少物理解释。Ulrich 等<sup>[7]</sup>在分析船舶工程问题时,基于 Mohr - Coulomb 屈服准则提出固液混合黏度计算公式,并提出基于土

颗粒体积比的悬浮质黏度计算公式。Ran 等<sup>[8]</sup>基于不可压缩光滑粒子流体动力学 (ISPH)、利用 Shakibaeinia 和 Jin<sup>[9]</sup>提出的混合黏度的计算公式分析动床溃坝问题,但该公式是基于牛顿流体特征提出的,在分析具有非牛顿特征的底床颗粒物时,其精度有限。底床颗粒物在流体冲刷下会经历由静止到启动,并有部分颗粒悬浮于水流底部等一系列状态。Fourtakas 和 Rogers<sup>[10]</sup>尝试将这些状态关联起来进行考虑,综合土力学中的屈服准则以及非牛顿流体力学、牛顿流体力学对动床溃坝问题进行分析。

为了更准确地描述启动后的底床颗粒物的动力学特征,本文在 Fourtakas 和 Rogers<sup>[10]</sup>的理论框架基础上,基于颗粒流的 Savage 数对摩擦系数进行合理的折减。通过与已有实验数据的对比,验证了该改进公式的合理性。

## 1 数值模型

### 1.1 SPH 法基本原理

SPH 方法以离散的、任意分布的粒子对计算域进行离散化,物理量通过相邻粒子间的插值确定。这一过程主要分两步,分别称为核近似和粒子近似。核近似是将场变量的函数及其导数以核函数及其导数的连续积分的形式进行表示;而粒子近似是将上述连续积分表示为支持域内临近离散粒子的累加求和。任意场函数  $f(\mathbf{r})$  基于 SPH 原理的一般表达形式为

$$\langle f(\mathbf{r}) \rangle = \int_{\Omega} f(\mathbf{r}') W(\mathbf{r} - \mathbf{r}', h) d\mathbf{r}', \quad (1)$$

其中:  $W$  称为核函数;  $h$  为光滑长度,代表核函数  $W$  的影响范围。核函数的选择需要满足归一化、紧支性和狄拉克函数性质等属性。

在方程(1)的基础上,按照分步积分和散度定理,可以将空间位置  $i$  处的场函数及其一阶导

数以离散格式表示为

$$\langle f_i \rangle = \sum_j f_j W_{ij} V_{ij}, \quad (2)$$

$$\langle \nabla f_i \rangle = \sum_j (f_j - f_i) \nabla_i W_{ij} V_{ij}, \quad (3)$$

其中:  $m_j$  和  $\rho_j$  是第  $j$  个粒子的质量和密度, 而场变量  $f_i = f(\mathbf{r}_i)$ , 核函数  $W_{ij} = W(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|, h)$ 。

本文采用 Wendland 型核函数<sup>[7]</sup>, 形式为

$$W = \alpha_d \left(1 - \frac{q}{2}\right)^4 (2q + 1), \quad (4)$$

其中:  $\alpha_d$  是归一化系数, 对该核函数在二维空间中  $\alpha_d = 7/(4\pi h^2)$ ;  $q$  是粒子  $i$  和  $j$  之间的归一化距离, 定义为  $q = |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|/h$ 。

## 1.2 控制方程

在拉格朗日框架下的弱压缩流体的控制方程<sup>[11]</sup> (质量和动量守恒方程) 可以写为如下形式:

$$\frac{d\rho}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial v^\alpha}{\partial x^\alpha}, \quad (5)$$

$$\frac{dv^\alpha}{dt} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma^{\alpha\beta}}{\partial x^\beta} + f^\alpha, \quad (6)$$

其中:  $\alpha$  和  $\beta$  代表坐标分量, 适用 Einstein 求和约定;  $v^\alpha$  是流体速度分量,  $\sigma^{\alpha\beta}$  是总应力张量的 ( $\alpha$ ,  $\beta$ ) 分量;  $f^\alpha$  代表外力引起的加速度分量, 一般只考虑重力;  $d/dt = \partial/\partial t + \mathbf{v} \cdot (\partial/\partial \mathbf{x})$  是物质导数。

将 SPH 法应用于上述 2 个守恒方程, 可以得到守恒方程的离散格式:

$$\frac{d\rho_i}{dt} = \rho_i \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{\rho_j} (v_i^\alpha - v_j^\alpha) \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_i^\alpha}, \quad (7)$$

$$\frac{dv_i^\alpha}{dt} = \sum_{j=1}^N m_j \left( \frac{\sigma_i^{\alpha\beta}}{\rho_i^2} + \frac{\sigma_j^{\alpha\beta}}{\rho_j^2} + C_{ij}^{\alpha\beta} \right) \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_i^\beta} + g_i^\alpha, \quad (8)$$

其中:  $N$  代表支持域内粒子总数;  $C_{ij}^{\alpha\beta}$  是稳定项, 用于减少应力波动及受拉不稳定现象, 一般采用人工黏度项的形式。

总应力张量可以分解为各项同性正应力  $\mathbf{P}$  和偏应力张量  $\boldsymbol{\tau}^{\alpha\beta}$ :

$$\boldsymbol{\sigma}^{\alpha\beta} = -\mathbf{P}\delta^{\alpha\beta} + \boldsymbol{\tau}^{\alpha\beta}, \quad (9)$$

其中:  $\delta^{\alpha\beta}$  是 Kronecker delta 符号, 当  $\alpha = \beta$  时,  $\delta^{\alpha\beta} = 1$ ; 当  $\alpha \neq \beta$  时,  $\delta^{\alpha\beta} = 0$ 。将上述应力分解形式代入式(8), 其中偏应力部分的计算, 采用如下离散格式<sup>[12]</sup>

$$\left\langle \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_i^{\alpha\beta}}{\partial x^\beta} \right\rangle = \sum_{j=1}^N m_j \left( \frac{\tau_i^{\alpha\beta} + \tau_j^{\alpha\beta}}{\rho_i \rho_j} \right) \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_i^\beta}, \quad (10)$$

偏应力张量

$$\boldsymbol{\tau}^{\alpha\beta} = 2\mu_{\text{app}} \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^{\alpha\beta}, \quad (11)$$

其中,  $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^{\alpha\beta}$  是应变率张量的分量, 包含正应变率和

偏应变率两部分。

偏应力与偏应变率之间的关系体现了流变特征, 底床物质发生侵蚀后其流变特征在 1.5 节介绍。应变率张量可以通过速度梯度进行计算:

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v^\alpha}{\partial x^\beta} + \frac{\partial v^\beta}{\partial x^\alpha} \right) - \frac{1}{3} \left( \frac{\partial v^\gamma}{\partial x^\gamma} \right) \delta^{\alpha\beta}, \quad (12)$$

其中,  $v^\alpha$  是速度分量, 其梯度的计算由 SPH 的离散格式表示为

$$\left. \frac{\partial v^\alpha}{\partial x^\beta} \right|_i = \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{\rho_j} v_{ij}^\alpha \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_i^\beta}. \quad (13)$$

## 1.3 状态方程

在本文中, 将流体看作弱可压缩流体 (密度变化小于 1%)。在弱可压缩 SPH 算法中, 发生运动的颗粒物质所受压力  $\mathbf{P}$  通过热力学状态方程显式地计算, 本文采用 Tait 型状态方程<sup>[13]</sup>:

$$P_i = \frac{c^2 \rho_0}{\gamma} \left( \left( \frac{\rho_i}{\rho_0} \right)^\gamma - 1 \right), \quad (14)$$

其中:  $c$  是声速;  $\rho_0$  是参考密度;  $\gamma = 7$ 。该状态方程已在黏性流体的分析中得到应用并获得了比较理想的计算结果<sup>[14-15]</sup>。

为了保证密度的浮动范围在 1% 以内, 声速的取值一般取流体可能出现的最大速度的 10 倍以上, 即

$$c > 10 \max(|\mathbf{v}|). \quad (15)$$

对未发生屈服而处于静止状态的底床颗粒物, 其正应力由静止土压和孔隙水压力确定,

$$P' = P - P_w = (\gamma_s - \gamma_w) z_s, \quad (16)$$

其中:  $P$  是静止土压;  $P_w$  是孔隙水压力;  $\gamma_s$  和  $\gamma_w$  分别是底床颗粒物和水的容重;  $z_s$  是粒子到底床侵蚀界面的距离。

## 1.4 侵蚀启动条件

底床颗粒物由于受重力和相互间的摩擦力、黏聚力作用, 具有一定的抗冲刷能力。只有来流满足一定条件时, 底床颗粒物才会启动并被来流挟带走。

Fourtakas 和 Rogers<sup>[12]</sup> 对比分析 Mohr-Coulomb 和 Drucker-Prager 两种侵蚀启动条件, 发现由前者得到的发生侵蚀的底床颗粒层等效黏度偏大, 因此侵蚀层厚度比实验结果小。因此本文假设底床颗粒物质满足 Drucker-Prager 准则, 其应变率张量可以分解为弹性部分和塑性部分, 而后者可以依据塑性流动准则进行计算:

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p = \lambda \frac{\partial g_p}{\partial \boldsymbol{\sigma}}, \quad (17)$$

其中： $\lambda$  是塑性乘子变化率； $g_p$  是塑性势函数。

只有当应力达到屈服面时才发生侵蚀启动。屈服面的形状由 Drucker-Prager 屈服准则描述，表示为

$$f = \alpha_\phi I_1 + \sqrt{J_2} - k_c = 0, \tag{18}$$

其中： $I_1$  是第一应力不变量，即  $I_1 = \sigma^{\gamma\gamma}/3$ ； $J_2$  是偏应力张量的第二不变量，即  $J_2 = \tau^{\alpha\beta}\tau^{\alpha\beta}/2$ 。

各向同性物质在处于屈服临界状态时，流体应力与底床颗粒物的屈服强度平衡，即  $\sqrt{J_2} = |\tau_y|$ ，代入式(18)则得到

$$|\tau_y| = -\alpha_\phi I_1 + \kappa_c. \tag{19}$$

因此，认为当满足(20)式时，水动力达到底床颗粒物的屈服强度，底床颗粒物在侵蚀作用下发生启动，

$$\sqrt{J_2} \geq -\alpha_\phi P_s + \kappa_c, \tag{20}$$

其中： $P_s$  是颗粒物所受的有效压应力； $\alpha_\phi$  和  $\kappa_c$  是 Drucker-Prager 准则中的常数，可以由摩尔库仑准则的黏聚力  $c$  和内摩擦角  $\phi$  算得<sup>[16]</sup>：

$$\alpha_\phi = \frac{\tan\phi}{\sqrt{9 + 12 \tan^2\phi}}, \kappa_c = \frac{3c}{\sqrt{9 + 12 \tan^2\phi}}. \tag{21}$$

由式(19)以及  $\sqrt{J_2} = 2\mu \sqrt{\Pi_D}$ ，Drucker-Prager 侵蚀启动条件可以表示为临界等效等效黏度的形式：

$$\mu_{app} = \frac{-\alpha_\phi P_s + \kappa_c}{2 \sqrt{\Pi_D}}. \tag{22}$$

1.5 流变模型

部分底床颗粒物受溃决水体冲刷而启动，与水发生混合并在其下的静止底床颗粒物上发生运动，其流变特征可以用黏塑性流变模型进行描述。在常用的流变模型中，Bingham 模型<sup>[17]</sup>是最简单的一种，该模型体现了物质在屈服之后，其偏应变与所受剪切应力之间的线性关系。而 Herschel-Bulkley 模型则能够描述黏塑性物质在塑性阶段的多种非线性变形特征，更具有广泛性。Herschel-Bulkley 流变模型<sup>[4]</sup>可以表示为

$$\begin{cases} \boldsymbol{\tau} = \left( \frac{|\tau_y|}{\sqrt{\Pi_D}} + K (\sqrt{\Pi_D})^{\frac{n-1}{n}} \right) \mathbf{D}, & |\boldsymbol{\tau}| > \tau_y, \\ \mathbf{D} = 0, & |\boldsymbol{\tau}| \leq \tau_y, \end{cases} \tag{23}$$

其中： $\tau_y$  代表屈服应力； $\Pi_D$  是偏应变张量的第二不变量； $K$  是稠度指数。

Bingham 模型和 Herschel-Bulkley 模型在屈服应力附近都存在应力的转折点，Frigaard 和 Nouar<sup>[18]</sup>对黏塑性非牛顿流变模型进行综合分析后认为 Herschel-Bulkley-Papanastasiou (HBP) 模型<sup>[19]</sup>以连续函数的形式提供对 Herschel-Bulkley 模型最好的近似。Herschel-Bulkley-Papanastasiou 模型的等效黏度表示为

$$\mu_s = \frac{|\tau_y|}{\sqrt{\Pi_D}} (1 - e^{-m \sqrt{\Pi_D}}) + K (\sqrt{\Pi_D})^{n-1}, \tag{24}$$

其中： $m$  控制着 HBP 模型与 Herschel-Bulkley 模型在塑性屈服过渡段(图 1 中曲线的转折点附近)的接近程度， $m$  越大则 HBP 模型越接近 Herschel-Bulkley 模型。参数  $n$  控制着物质在剪应力作用下的应变硬化(或软化)特征； $n > 1$  发生应力硬化， $n < 1$  发生应力软化； $n = 1$  时，HBP 模型则简化为 Bingham 模型。 $\tau_y$  代表屈服应力。偏应变张量的第二不变量  $\Pi_D$  定义为

$$\Pi_D = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial u^\alpha}{\partial x^\alpha} \right)^2 + \left( \frac{\partial u^\beta}{\partial x^\beta} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u^\alpha}{\partial x^\beta} + \frac{\partial u^\beta}{\partial x^\alpha} \right)^2 \right]. \tag{25}$$

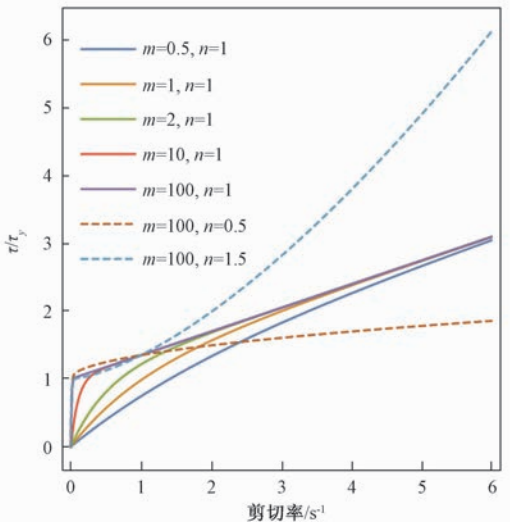


图 1 HBP 模型示意图

Fig.1 Schematic diagram of HBP model

从数值计算的角度来说，SPH 法是基于显式时间迭代算法的，时间步的上限是基于一定的收敛准则确定的。Bingham 模型和 Herschel-Bulkley 模型在分母中都包含偏应变张量第二不变量  $\Pi_D$ ，当  $\Pi_D$  趋于无穷小时，等效黏度会趋于无穷大，物理上代表未屈服区域内底床颗粒物不发生变形，但是在数值计算上会导致计算收敛困难。因此可以为上述两种模型的等效黏度设置一个上限值，通常取  $K$  的

1 000 倍比较合理。HBP 模型中包含  $\Pi_D$  的指数项  $e^{-m\sqrt{\Pi_D}}$ , 避免了这种收敛问题的出现。

1.6 悬浮质模型

底床颗粒物满足侵蚀启动条件而发生运动后,可以将其看作一种伪流体,基于黏塑性流变模型来描述其运移变形特征。发生运动的底床颗粒物与溃决水体接触面附近,颗粒物受冲刷及水的浮力作用会悬浮于水流底部,进而导致这底部水流的黏度有所提高,提高后的黏度直接影响两相界面的动力学特征,对计算结果有重要影响。Gotoh 和 Fredso<sup>[20]</sup>在采用移动粒子半隐式(MPS)法分析细颗粒在水中的沉降时,采用如下公式计算混合黏度:

$$\mu_{\text{mix}} = \mu_w / \left( 1 + \alpha_s \frac{\rho_s}{\rho_w} \right)^{1/2}, \quad (26)$$

其中: $\rho_s$ 和 $\rho_w$ 分别是颗粒物和水的密度; $\alpha_s$ 是固体颗粒物的体积比。Shakibaenia 和 Jin<sup>[9]</sup>也采用同样的公式。Fourtakas<sup>[10]</sup>在分析动床条件下的溃坝问题时,将含悬浮颗粒的水流视为牛顿流体,认为混合黏度是固体颗粒物的体积比的函数,采用 Vand 模型<sup>[21]</sup>来计算混合黏度:

$$\mu_{\text{mix}} = \mu_w e^{\frac{2.5\alpha_s}{1-39\alpha_s/64}}, (\alpha_s \leq 0.3), \quad (27)$$

其中, $\alpha_s$ 采用如下离散格式计算:

$$\alpha_{s,i} = \sum_{j_{\text{sat}} \in 2h} \frac{m_j}{\rho_j} / \sum_{j \in 2h} \frac{m_j}{\rho_j}, \quad (28)$$

式中: $j_{\text{sat}}$ 是*i*粒子的支持域内处于饱和状态的粒子; $h$ 是光滑半径。

通过式(27)计算的混合黏度,虽然体现了固相体积比对混合黏度的影响,但计算是基于液相的黏度 $\mu_w$ 进行计算的,实际是将固液混合体看作伪牛顿流体,因此该公式仅当细颗粒物含量较小时才适用。

1.7 流变模型的改进

Bagnold 耗散压力原理认为,牛顿流体中的颗粒流在剪切应力作用下所产生的能量耗散是颗粒间的非弹性碰撞产生的,其大小依赖于颗粒间的回弹系数<sup>[22]</sup>。Armanini 通过对实验的分析发现,当水下颗粒流内存在明显摩擦应力时,摩擦产生的剪应力既依赖剪切率同时也依赖压力(库仑型),其摩擦角不应该是常数,而是依赖于流体的局部运动特征,如颗粒间的压应力、接触特征以及颗粒的物质构成等因素<sup>[23]</sup>。体现上述主要因素对颗粒流剪切应力影响的参数称为 Savage 数<sup>[24]</sup>,

表示为

$$I_s = \frac{\rho_s (\dot{\gamma} d_p)^2}{p^g}, \quad (29)$$

其中: $\rho_s$ 是颗粒密度; $\dot{\gamma}$ 是剪切应变率; $d_p$ 是颗粒直径; $p^g$ 是颗粒所受压力。

摩擦产生的剪切应力在趋近静止底床表面时应该符合库仑型摩擦特征;当 $I_s$ 足够大时,应逐渐趋于消失<sup>[23]</sup>。如果将水下颗粒流内的摩擦系数看作常数,则不能充分反映真实的动力学特征,必然导致计算结果有一定的出入。

以底床颗粒物的摩擦特征为基础,本文对启动后的水下颗粒流内摩擦应力部分进行修正,提出如下混合黏度计算公式:

$$\mu_{\text{mix}} = \frac{I_{s0}}{I_s + I_{s0}} \frac{|\tau_y|}{\sqrt{\Pi_D}} (1 - e^{-m\sqrt{\Pi_D}}) + K (\sqrt{\Pi_D})^{n-1}, \quad (30)$$

其中, $I_{s0}$ 是依赖间隙流体特征和固体颗粒物构成特征的参数,其值需要通过实验确定。 $I_s$ 是 Savage 数,由式(29)计算。由于 $I_s$ 越靠近底床数值越小,因此由式(30)确定的混合黏度 $\mu_{\text{mix}}$ 在静止底床的上边界处取得最大值。

2 溃坝问题分析

采用 Spinewine<sup>[25]</sup>的溃坝室内试验数据对上述模型进行验证。

2.1 模型及相关参数

Spinewine 所做实验的几何模型如图 2 所示,模型总长度为 6.0 m,宽度为 0.25 m。模型底部全长范围内平铺 0.12 m 厚的松散 PVC 细颗粒(等效直径 $d_p = 3.9$  mm),闸门位于 3.0 m 处,闸门左侧水体高度为 0.25 m。

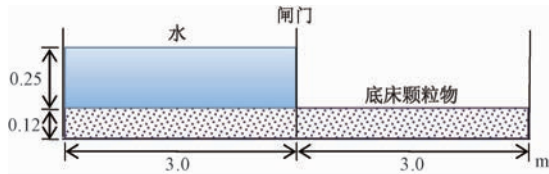


图 2 计算模型示意图

Fig. 2 Geometry of numerical modeling model

底床 PVC 颗粒物处于饱和状态,颗粒密度为 1 580 kg/m<sup>3</sup>,初始体积比为 0.58,因此换算为等效均质体后的等效体积密度为 1 336 kg/m<sup>3</sup>。颗粒物内摩擦角为 38°,黏聚力忽略不计。

数值模拟基于开源的 SPHYSICS2D 代码,结合本文介绍的模型在该代码基础上进行二



次开发,使其能够计算动床条件下的冲刷侵蚀问题。本文所涉及的溃坝问题的几何模型相对比较简单、规则,可以利用 SPHYSICSgen2D 完成建模。

根据上述几何尺寸建立数值计算模型,初始时刻的数值计算模型如图 3 所示,图中同时还显示了两种物质的密度(Rhop)的取值情况。

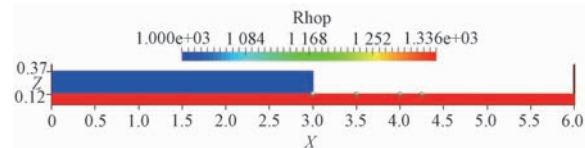


图 3 数值模型几何尺寸图

Fig. 3 Geometry diagram of numerical model

闸门后的水体最初处于静止状态,在  $t=0$  时刻打开闸门,闸门后水体发生溃决,进而对底床产生冲刷。

## 2.2 模拟参数

基于 SPH 方法的模拟采用 Wendland 型核函数、固定的光滑半径、显式欧拉时间积分。通过虚粒子模拟固墙边界,固墙边界上应满足无滑移条件。水体和底床颗粒物初始压力按静水压力考虑。粒子间距 0.005 m,光滑长度取粒子间距的 1.3 倍,初始时间步长  $1.0 \times 10^{-8}$ , CFL = 0.1。采用 Symplectic 型<sup>[26]</sup>时间积分算法;密度过滤采用  $\delta$ -SPH 算法<sup>[27]</sup>,密度校正系数  $\xi = 0.1$ 。底床颗粒物 HBP 模型流变模型参数  $n = 1.8$ ,  $m = 100$ ,稠度指数  $K = 0.002$ 。通过对实验中底床颗粒速度分布特征的拟合,确定参数  $I_{s0}$  取值 0.04。

## 2.3 模拟结果及对比分析

### 2.3.1 常摩擦系数情况

当固相体积比  $\alpha_s \leq 0.3$  时,悬浮层内的混合黏度按式(27)计算;悬浮层与静止底床之间的混合层( $\alpha_s > 0.3$ )的混合黏度按式(24)计算。

模拟总时长 1 s,截取数值模拟获得的溃决水体在  $t = 0.25$ 、0.5 和 0.75 s 这 3 个时刻的速度云图,并与实验实测结果<sup>[16]</sup>进行对比如图 4 所示。

从图 4(a)和(b)中可以看出,数值模拟的运动前缘与实验结果吻合的都比较好。图 4(c)是  $t = 0.75$  s 时的情况,模拟的运动前缘位置比实验结果靠后。该模拟结果与 Fourtakas<sup>[10]</sup>模拟 Ulrich 的溃坝实验<sup>[7]</sup>结论是一致的,即模型在预测侵蚀界面方面可以获得较满意的结果,但是从 0.75 s 开始,算得的溃决体的运动略滞后于实验结果。

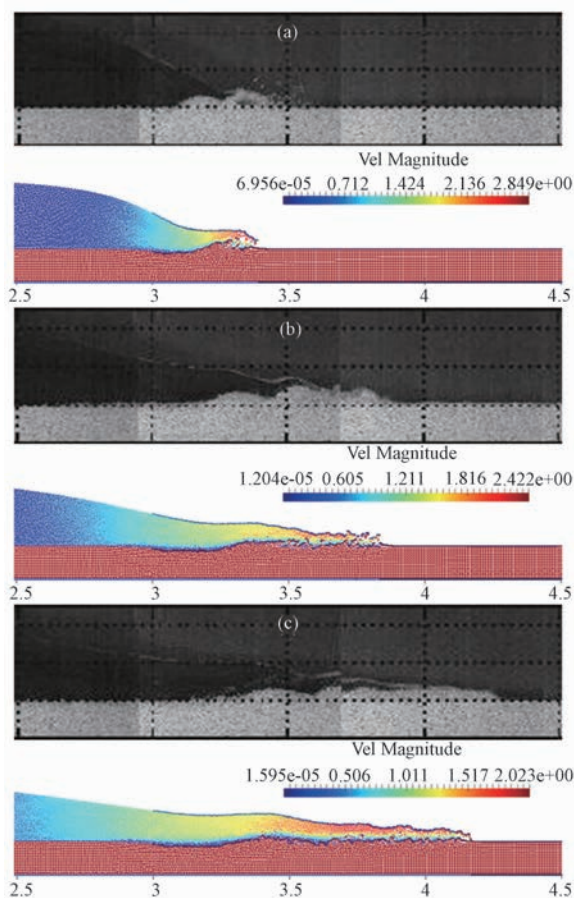


图 4 模拟流动形态与实验对比图

Fig. 4 Comparison of flow profiles between numerical modeling and experiment

### 2.3.2 变摩擦系数情况

坝后水体溃决之后,与底床颗粒物迅速产生接触,底床颗粒物在动水压力作用下一部分颗粒上浮进入水体内部,接触边界附近的颗粒发生重新排列,颗粒间的接触紧密度发生变化。上层流体产生的快速剪切导致表层颗粒间出现碰撞应力,这些因素都导致等效摩擦系数在深度方向上的分布是不均匀的。正如在前面 1.7 节讨论的那样, Savage 数综合反映了上述多个因素对摩擦剪切应力的影响。

为改进数值模拟结果,当  $\alpha_s > 0.3$  时,混合黏度按改进公式(30)计算,其他参数取值与之前的模拟一样。分析 1 s 时间内溃决水体与底床的动态演变过程,截取  $t = 0.25$ 、0.5 和 0.75 s 这 3 个时刻的模拟结果与实验结果进行对比,如图 5 所示。

将图 4 与图 5 进行对比可以发现,后图中数值模拟获得的上浮于原底床顶面以上的颗粒物更多,底床被冲蚀后的轮廓更接近实验结果。尽管

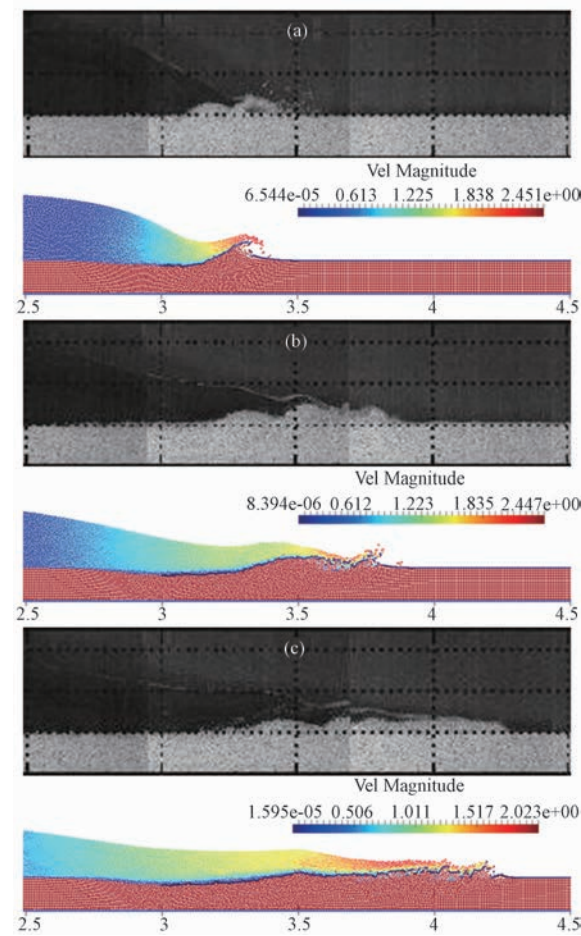


图 5 模拟流动形态与实验对比图(改进模型)  
Fig.5 Comparison of flow profiles between numerical modeling (using an improved model) and experiment

2 个模拟在  $\alpha_s \leq 0.3$  的悬浮质采用了相同的公式,但超过原底床顶面以上的、被冲蚀起来的颗粒有相当大的比例是满足  $\alpha_s > 0.3$  的颗粒,由于针对这部分颗粒 2 个模拟采用的公式不同,所以计算结果会有差异。

从图 5 中可以看到,数值模拟结果不仅在  $t = 0.25\text{ s}$  和  $t = 0.5\text{ s}$  与实验结果吻合较好,而且在  $t = 0.75\text{ s}$  也具有很高的吻合度,底床颗粒物运动前缘与实验结果非常接近。

在两次数值模拟中同时记录了底床顶面 4 个点的底床厚度随时间变化情况。这 4 个点的位置如图 3 所示,距离模型最左侧 0 点的距离分别是 3.0、3.5、4.0 和 4.25 m。图 6 中第  $n$  曲线表示采用可变摩擦系数模拟得到的第  $n$  个点处的层厚变化,第  $n'$  曲线表示采用常摩擦系数模拟得到的第  $n$  个点处的层厚变化( $n = 1 \sim 4$ )。以 2 和 2' 两条曲线为例,在  $x = 3.5\text{ m}$  的第 2 点处,采用可变摩擦系数时发生冲蚀的时间提前了约 0.04 s,冲蚀

引起的最大层厚增加了 33.9 mm。

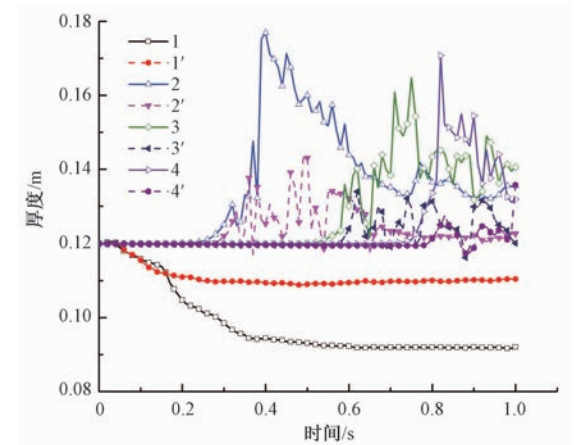


图 6 底床高度对比图  
Fig.6 Comparison of flow depths of sediment

3 结论与展望

流体与固体颗粒的混合物具有非常复杂的动力学特征,受固液两相构成比例、两相各自的力学特征以及两相之间的相互作用等多种因素影响。因此,溃决流体对底床颗粒物产生高速的冲刷和侵蚀作用,这一过程伴随着复杂的动力学过程。对动床条件下溃坝问题的数值模拟既要克服数值计算方法方面的困难,同时要深入物理过程本身的机理,只有充分体现内部的物理原理,才能获得更好的仿真模拟结果。

本文以 Drucker-Prager 屈服准则作为侵蚀是否发生的判断条件,将发生侵蚀的颗粒以满足 Herschel-Bulkley-Papanastasiou 流变特征的非牛顿流体特征进行描述,较好地解决了无黏颗粒物底床是否发生侵蚀以及侵蚀后底床颗粒物的运动特征如何描述这两个关键问题。根据 Armanini<sup>[23]</sup> 对水中颗粒流的研究成果,考虑影响摩擦系数的主要因素,本文提出一种摩擦系数的修正公式,引入到基于 SPH 方法的计算模型中,通过数值模拟结果与实验结果的对比,证明了该修正公式的合理性。

通过对比分析发现,底层颗粒物摩擦系数的取值对底床的侵蚀深度分布有明显的影响。通过对 HPB 模型中的摩擦系数进行合理的折减,计算得到的溃决流体的流速更快,闸门附近的侵蚀量略有增加,流体运动前缘附近的颗粒上浮、雍高量将有所增加,流体运动前缘的位置与实验结果更加吻合。

在本文中以固相体积比 0.3 作为分界来区分启动的底床颗粒物中发生悬浮的颗粒,并且两部分采用了不同的计算模型。如何基于颗粒物本身的动力学特征来确定它们的运动形态,并以一个统一的模型来描述启动的颗粒物,需要基于对颗粒物与流体相互作用过程的更深入的分析,值得进一步深入研究。

参考文献

[ 1 ] Gingold R A, Monaghan J J. Smoothed particle hydrodynamics: theory and application to non-spherical stars [J]. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 1977,181(3): 375-389.

[ 2 ] Lucy L B. A numerical approach to the testing of the fission hypothesis[J]. The Astronomical Journal, 1977,82: 1013-1024.

[ 3 ] Shao S, Lo E Y M. Incompressible SPH method for simulating Newtonian and non-Newtonian flows with a free surface[J]. Advances in Water Resources, 2003,26(7): 787-800.

[ 4 ] Laigle D, Lachamp P, Naaim M. SPH-based numerical investigation of mudflow and other complex fluid flow interactions with structures[J]. Computational Geosciences, 2007,11(4): 297-306.

[ 5 ] Manenti S, Sibilla S, Gallati M, et al. SPH Simulation of Sediment Flushing Induced by a Rapid Water Flow [J]. Journal of Hydraulic Engineering, 2012,138(3): 272-284.

[ 6 ] Razavitoosi S L, Ayyoubzadeh S A, Valizadeh A. Two-phase SPH modelling of waves caused by dam break over a movable bed[J]. International Journal of Sediment Research, 2014, 29(3): 344-356.

[ 7 ] Ulrich C, Leonardi M, Rung T. Multi-physics SPH simulation of complex marine-engineering hydrodynamic problems[J]. Ocean Engineering, 2013,64: 109-121.

[ 8 ] Ran Q, Tong J, Shao S, et al. Incompressible SPH scour model for movable bed dam break flows [J]. Advances in Water Resources, 2015,82(8): 39-50.

[ 9 ] Shakibaeinia A, Jin Y-C. A mesh-free particle model for simulation of mobile-bed dam break[J]. Advances in Water Resources, 2011,34(6): 794-807.

[10] Fourtakas G, Rogers B D. Modelling multi-phase liquid-sediment scour and resuspension induced by rapid flows using Smoothed Particle Hydrodynamics (SPH) accelerated with a Graphics Processing Unit (GPU) [J]. Advances in Water Resources, 2016,92(6): 186-199.

[11] Xu X, Ouyang J, Yang B, et al. SPH simulations of three-dimensional non-Newtonian free surface flows[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2013,256(4): 101-116.

[12] Fourtakas G, Rogers B D, Laurence D R. Modelling sediment resuspension in industrial tanks using SPH[J]. La Houille Blanche, 2013,(2): 39-45.

[13] Monaghan J J. Simulating free surface flows with SPH[J]. Journal of Computational Physics, 1994,110(2): 399-406.

[14] Morris J, Monaghan J. A switch to reduce SPH viscosity[J]. Journal of Computational Physics, 1997,136(1): 41-50.

[15] Fang J, Parriaux A, Rentschler M, et al. Improved SPH methods for simulating free surface flows of viscous fluids[J]. Applied Numerical Mathematics, 2009,59(2): 251-271.

[16] Chen W-F, Mizuno E. Nonlinear analysis in soil mechanics [M]. Amsterdam: Elsevier, 1990.

[17] Rodriguez-Paz M X, Bonet J. A corrected smooth particle hydrodynamics method for the simulation of debris flows[J]. Numerical Methods for Partial Differential Equations, 2004, 20(1): 140-163.

[18] Frigaard I A, Nouar C. On the usage of viscosity regularisation methods for visco-plastic fluid flow computation [J]. Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics, 2005,127(127): 1-26.

[19] Papanastasiou T C. Flows of Materials with Yield[J]. Journal of Rheology, 1987,31(5): 385-404.

[20] Gotoh H, Fredsoe Jr. Lagrangian two-phase flow model of the settling behavior of fine sediment dumped into water[C] // International Conference on Coastal Engineering, 2001: 3 906-3 919.

[21] Vand V. Viscosity of Solutions and Suspensions. I. Theory [J]. The Journal of Physical and Colloid Chemistry, 1948,52(2): 277-299.

[22] Bagnold R A. Experiments on a Gravity-Free Dispersion of Large Solid Spheres in a Newtonian Fluid under Shear[J]. Proceedings of the Royal Society of London Series A Mathematical and Physical Sciences, 1954,225(1 160): 49-63.

[23] Armanini A, Larcher M, Nucci E, et al. Submerged granular channel flows driven by gravity [J]. Advances in Water Resources, 2014,63(2): 1-10.

[24] Savage S B. The mechanics of rapid granular flows [J]. Advances in Applied Mechanics, 1984,24(87): 289-366.

[25] Spinewine B. Two-layer flow behaviour and the effects of granular dilatancy in dam-break induced sheet-flow [D]. Belgium: Université catholique de Louvain PhD Thesis, 2005.

[26] Leimkuhler B J, Reich S, Skeel R D. Mathematical approaches to biomolecular structure and dynamics[M]. New York:Springer,1996: 161-185.

[27] Molteni D, Colagrossi A. A simple procedure to improve the pressure evaluation in hydrodynamic context using the SPH [J]. Computer Physics Communications, 2009,180(6): 861-872.