文章编号:2095-6134(2018)04-0438-06

$\mathbb{H}P^3$ 中的共形极小曲面的构造*

张文娟,陈晓东†

(中国科学院大学数学科学学院, 北京 100049)

(2017年3月13日收稿; 2017年4月17日收修改稿)

Zhang W J, Chen X D. Construction of conformal minimal surfaces in $\mathbb{H}P^3$ [J]. Journal of University of Chinese Academy of Sciences, 2018,35(4):438-443.

摘 要 通过扭映射 $\pi:\mathbb{C}P^7\to\mathbb{H}P^3$ 构造出 $\mathbb{H}P^3$ 中10族共形极小曲面的例子. 根据Eells和Wood在1983年得到的结论,水平调和映射在淹没映射下的像仍然是调和的. 首先给出 $\mathbb{C}P^7$ 中水平全纯曲面在局部下的一个分类定理. 基于该分类定理以及Eells和Wood的结论, 利用扭映射,构造出 $\mathbb{H}P^3$ 中的共形极小曲面.

关键词 四元数射影空间;共形极小曲面;扭映射

中图分类号:O186.1 **文献标志码**:A **doi**:10.7523/j.issn.2095-6134.2018.04.002

Construction of conformal minimal surfaces in $\mathbb{H}P^3$

ZHANG Wenjuan, CHEN Xiaodong

(*School of Mathematical Sciences, University of Chinese Academy of Sciences, Beijing* 100049, *China*)

Abstract In this paper, we construct ten families of conformal minimal surfaces immersed into $\mathbb{H}P^3$ by the twistor map $\pi:\mathbb{C}P^7\to\mathbb{H}P^3$. The construction is based on Eells and Wood's conclusion in 1983 that the projection of a horizontal harmonic map is also harmonic. Firstly, we give a characterization theorem for horizontal holomorphic surfaces in $\mathbb{C}P^7$. By this theorem and Eells and Wood's conclusion, we get some conformal minimal surfaces immersed into $\mathbb{H}P^3$ by the twisted map.

Keywords quaternionic projective space; conformal minimal surface; twistor map

极小曲面的研究一直是微分几何子流形研究领域中的一个重点，通常对于极小曲面的研究，会选取具有特殊性质的外围空间，如空间形式、齐性空间等。而四元数射影空间是对称空间，因此四元数射影空间中极小曲面的研究具有重要意义。但是因为四元数射影空间本身的结构比较复杂,所以四元数射影空间中极小曲面的研究也颇为困难。

这些年来,在国内外学者的研究下,四元数射影空间中极小曲面的研究也取得了一些重要的研究成果。

由文献[1],我们知道四元数射影空间 $\mathbb{H}P^1$ 与标准球面 S^4 是等距同构的,因此在微分同胚的意义下, $\mathbb{H}P^1$ 中的极小曲面研究通常转化为对 S^4 中极小曲面的研究。Bryant[2] 利用扭映射 $\pi:\mathbb{C}P^3\to\mathbb{H}P^1$ 研究 $\mathbb{H}P^1$ 中的共形极小紧致曲面,并且构造 $\mathbb{C}P^3$ 中的水平全纯曲面。对于四元数射影空间 $\mathbb{H}P^2$ 的研究也取得了很多成果。Aithal[3] 刻画从

* 国家自然科学基金(11331002, 11471308)资助

† 通信作者,E-mail:chenxiaodong12@mails.ucas.ac.cn

S^2 到 $\mathbb{H}P^2$ 中的调和映射。Bahy-El-Dien 和 Wood[4] 构造四元数射影空间中的调和二维球面。注意到,在共形映射的意义下,映射调和等价于映射极小[5]。基于这些事实,He 和 Jiao[6] 给出 $\mathbb{H}P^2$ 中线性满、全非分歧、常曲率共形极小二维球面的一个分类定理。对于更高维的四元数射影空间中极小曲面的研究就更为困难,取得的结论也比较少。He 和 Jiao[7] 给出 $\mathbb{H}P^n$ 中具有平行第二基本形式的共形极小二维球面的分类结果。

由于扭映射给出 $\mathbb{H}P^n$ 与$\mathbb{C}P^{2n+1}$ 水平部分的一个等同,而复射影空间中极小曲面的研究有很多已知的结果,因此扭映射是研究四元数射影空间的一个重要工具。本文正是利用映射 $\pi:\mathbb{C}P^7 \to \mathbb{H}P^3$ 构造 $\mathbb{H}P^3$ 中共形极小曲面的例子。

1　预备知识

用符号 $\mathbb{H}$ 表示所有四元数组成的集合,那么 $\mathbb{H}$ 是一个以 1,i,j,k 为基的四维实向量空间,并且 $\mathbb{H}$ 上有环运算如下:

$$\mathrm{i}^2 = \mathrm{j}^2 = \mathrm{k}^2 = -1, \mathrm{ij} = \mathrm{k} = -\mathrm{ji},$$
$$\mathrm{jk} = \mathrm{i} = -\mathrm{kj}, \mathrm{ki} = \mathrm{j} = -\mathrm{ik}.$$

通常,把 $\mathbb{H}$ 看成是复数域 $\mathbb{C}$ 上的一个以 1,j 为基的二维右模。对于任意的 $z = z_1 + \mathrm{j}z_2, w = w_1 + \mathrm{j}w_2 \in \mathbb{H}$,有

$$zw = (z_1w_1 - \bar{z}_2w_2) + \mathrm{j}(z_2w_1 + \bar{z}_1w_2),$$

可以验证该乘法与上述环运算是等价的。

在四元数$\mathbb{H}$ 上有一个自然的共轭运算:

$$(z_1 + \mathrm{j}z_2)^* = \bar{z}_1 - \mathrm{j}z_2.$$

用 $\mathbb{H}^n$ 表示四元数 n 元组构成的集合,本文把 $\mathbb{H}^n$ 中的元素写成列向量的形式。那么 $\mathbb{H}^n$与$\mathbb{C}^{2n}$ 有一个自然的等同:

$$z_1 + \mathrm{j}z_2 \mapsto \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}.$$

四元数射影空间 $\mathbb{H}P^n$ 表示$\mathbb{H}^{n+1}$ 中的四元数直线组成的集合,即对于 $[v_1]_{\mathbb{H}}$ 和$[v_2]_{\mathbb{H}} \in \mathbb{H}P^n$,$[v_1]_{\mathbb{H}} = [v_2]_{\mathbb{H}}$ 当且仅当 $\exists x \in \mathbb{H}$,使得 $v_2 = v_1x$.

辛群 $Sp(n) = \{A \in GL(n;\mathbb{H}) \mid A^{*\mathrm{T}} \cdot A = I_n\}$,其中 I_n 表示 n 阶单位矩阵。对于 $A \in Sp(n+1)$,$[v]_{\mathbb{H}} \in \mathbb{H}P^n$,$n+1$ 阶辛群 $Sp(n+1)$ 在$\mathbb{H}P^n$ 上有一个自然的作用:

$$A \cdot [v]_{\mathbb{H}} = [Av]_{\mathbb{H}},$$

可以验证该作用是可迁的,并且 $G_0 = Sp(1) \times Sp(n)$ 是该作用在$[(1,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}]_{\mathbb{H}} \in \mathbb{H}P^n$ 处的迷向群。因此,$\mathbb{H}P^n$ 的齐性表示为

$$\mathbb{H}P^n = Sp(n+1)/Sp(1) \times Sp(n).$$

辛群 $Sp(n+1)$ 可以看做是特殊酉群 $SU(2n+2)$ 中的一个子群:$Sp(n+1) \hookrightarrow SU(2n+2)$,$X + \mathrm{j}Y \mapsto \begin{pmatrix} X & -\bar{Y} \\ Y & \bar{X} \end{pmatrix}$,其中 $X, Y \in GL(n+1;\mathbb{C})$. 这样可以得到下面的一个交换图:

$$\begin{array}{ccc} & Sp(n+1) & \\ \pi_2 \swarrow & & \searrow \pi_1 \\ \mathbb{H}P^n & \xleftarrow{\pi} & \mathbb{C}P^{2n+1} \end{array}$$

其中 $\pi:\mathbb{C}P^{2n+1} \to \mathbb{H}P^n$,$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \mapsto [z_1 + \mathrm{j}z_2]_{\mathbb{H}}$,$z_1, z_2 \in \mathbb{C}^{n+1}$,是扭映射,它是一个纤维化。

如果 $A = X + \mathrm{j}Y \in Sp(n+1)$,记 $A = (A_0, \cdots, A_n)$,$X = (X_0, \cdots, X_n)$,$Y = (Y_0, \cdots, Y_n)$,那么 $\pi_1(A) = \begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \end{bmatrix}$和 $\pi_2(A) = [A_0]_{\mathbb{H}}$ 为自然投影。要说明上述图为交换图,需要保证 π_1 是一个满射。而 $Sp(n+1) \to \mathbb{C}P^{2n+1}$ 是一个以 $U(1) \times Sp(n)$ 为结构群的主纤维丛,因此 π_1 自然是一个满射。所以,上述图表可交换。

定义 1.1　由于扭映射是一个纤维化,因此 $\mathbb{C}P^{2n+1}$ 上的水平分布 $\mathscr{H}$ 定义为纤维切空间的正交补部分,其中 $\mathbb{C}P^{2n+1}$ 上的度量为 Fubini-Study 度量。特别的,当 M 是一个黎曼面的时候,如果 $f:M \to \mathbb{C}P^{2n+1}$ 的切映射的像在 $\mathscr{H}$ 中,则称 f 为水平曲面。

根据文献[1],对于 $[z] \in \mathbb{C}P^{2n+1}$,记 $z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$,那么有下述等同:

$$\mathscr{H}_{[z]} \leftrightarrow \{w \in z^{\perp} \mid \sigma_z(w) = 0, \sigma_z = -z_2^{\mathrm{T}}\mathrm{d}z_1 + z_1^{\mathrm{T}}\mathrm{d}z_2\}, \tag{1}$$

其中 $z_1, z_2 \in \mathbb{C}^{n+1}$.

2　$\mathbb{H}P^3$ 中的共形极小曲面

在本节中,利用扭映射 $\pi:\mathbb{C}P^7 \to \mathbb{H}P^3$ 来构造 $\mathbb{H}P^3$ 中的共形极小曲面.

2.1　$\mathbb{C}P^{2n+1}$ 中曲面水平的等价条件

在本小节中,将介绍 $\mathbb{H}P^n$ 的上度量,并从度量的角度给出 $\mathbb{C}P^{2n+1}$ 中曲面水平的一个等价条件。

用 Ω 表示 $Sp(n+1)$ 上的 Maurer-Cartan 形式,即 Ω 是 $Sp(n+1)$ 上的一个取值在 $\mathfrak{sp}(n+1)$ 上的左不变 1 - 形式,$\Omega = (\Omega_\beta^\alpha)$,$0 \leqslant \alpha, \beta \leqslant n$.

由 $\mathbb{H}P^n$ 的齐性表示 $\mathbb{H}P^n = Sp(n+1)/Sp(1) \times Sp(n)$，可以得到李代数的分解：

$$\mathscr{g} = \mathscr{g}_0 \oplus \mathscr{m},$$

其中 $\mathscr{g}$ 为 $Sp(n+1)$ 的李代数，$\mathscr{g}_0$ 为 G_0 的李代数，

$$\mathscr{m} = \left\{\begin{pmatrix} 0 & -\boldsymbol{X}^{*\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{X} & 0 \end{pmatrix} : \boldsymbol{X} \in \mathbb{H}^n\right\}.$$

因此，

$$\sum_{a=1}^{n} \Omega_0^{a*} \cdot \Omega_0^a$$

是 $\mathscr{m}$ 上的一个不变的内积，那么根据齐性空间中不变度量的结论[8]，它给出了 $\mathbb{H}P^n$ 上的一个不变度量：

$$\mathrm{d}s^2_{\mathbb{H}P^n} = \sum_{a=1}^{n} \omega_0^{a*} \cdot \omega_0^a, \tag{2}$$

其中 $\omega = s^* \Omega, s: U \subset \mathbb{H}P^n \to Sp(n+1)$ 为任意一个局部截面。在该不变度量下，辛群 $Sp(n+1)$ 是 $\mathbb{H}P^n$ 的等距群。

在预备知识中，我们知道 $Sp(n+1) \hookrightarrow SU(2n+2)$，$\boldsymbol{X} + \mathrm{j}\boldsymbol{Y} \mapsto \begin{pmatrix} \boldsymbol{X} & -\bar{\boldsymbol{Y}} \\ \boldsymbol{Y} & \bar{\boldsymbol{X}} \end{pmatrix}$，在该等同下，$\mathbb{C}P^{2n+1}$ 有齐性表示：$\mathbb{C}P^{2n+1} = Sp(n+1)/U(1) \times Sp(n)$.

类似于 $\mathbb{H}P^n$ 的情况，令 $\tilde{\Omega} = (\tilde{\Omega}^A_B)$，$0 \leqslant A, B \leqslant 2n+1$，为 $Sp(n+1) \hookrightarrow SU(2n+2)$ 上的 Maurer-Cartan 形式。取 $\tilde{s}: U \subset \mathbb{C}P^{2n+1} \to Sp(n+1)$ 为任意一个局部截面，记 $\tilde{\omega} = s^* \tilde{\Omega}$，则 $\mathbb{C}P^{2n+1}$ 上的不变度量为：

$$\mathrm{d}s^2_{\mathbb{C}P^{2n+1}} = \sum_{A=1}^{2n+1} \bar{\tilde{\omega}}^A_0 \cdot \tilde{\omega}^A_0. \tag{3}$$

取 $g = \boldsymbol{X} + \mathrm{j}\boldsymbol{Y} \in Sp(n+1)$，则

$$\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{g}^{-1}\mathrm{d}\boldsymbol{g}, \tag{4}$$

$$\tilde{\boldsymbol{\Omega}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{X} & -\bar{\boldsymbol{Y}} \\ \boldsymbol{Y} & \bar{\boldsymbol{X}} \end{pmatrix}^{-1} \mathrm{d}\begin{pmatrix} \boldsymbol{X} & -\bar{\boldsymbol{Y}} \\ \boldsymbol{Y} & \bar{\boldsymbol{X}} \end{pmatrix}. \tag{5}$$

为方便起见，引入记号 $\boldsymbol{\Omega}^\alpha_\beta = \boldsymbol{\Gamma}^\alpha_\beta + \mathrm{j}\boldsymbol{\Sigma}^\alpha_\beta$，其中 $\boldsymbol{\Gamma}^\alpha_\beta$ 和 $\boldsymbol{\Sigma}^\alpha_\beta$ 为复值 1 - 形式。

则式(4)和式(5)可以写成(为书写方便，本文仅给出 $n = 3$ 的情形，一般的情况只是矩阵的维数不同，并没有本质区别)：

$$\boldsymbol{\Omega} = \begin{pmatrix} \Omega^0_0 & \Omega^0_1 & \Omega^0_2 & \Omega^0_3 \\ \Omega^1_0 & \Omega^1_1 & \Omega^1_2 & \Omega^1_3 \\ \Omega^2_0 & \Omega^2_1 & \Omega^2_2 & \Omega^2_3 \\ \Omega^3_0 & \Omega^3_1 & \Omega^3_2 & \Omega^3_3 \end{pmatrix}, \tag{6}$$

$$\tilde{\boldsymbol{\Omega}} = \begin{pmatrix} \Gamma^0_0 & \Gamma^0_1 & \Gamma^0_2 & \Gamma^0_3 & -\Sigma^0_0 & -\Sigma^0_1 & -\Sigma^0_2 & -\Sigma^0_3 \\ \Gamma^1_0 & \Gamma^1_1 & \Gamma^1_2 & \Gamma^1_3 & -\Sigma^1_0 & -\Sigma^1_1 & -\Sigma^1_2 & -\Sigma^1_3 \\ \Gamma^2_0 & \Gamma^2_1 & \Gamma^2_2 & \Gamma^2_3 & -\Sigma^2_0 & -\Sigma^2_1 & -\Sigma^2_2 & -\Sigma^2_3 \\ \Gamma^3_0 & \Gamma^3_1 & \Gamma^3_2 & \Gamma^3_3 & -\Sigma^3_0 & -\Sigma^3_1 & -\Sigma^3_2 & -\Sigma^3_3 \\ \Sigma^0_0 & \Sigma^0_1 & \Sigma^0_2 & \Sigma^0_3 & \Gamma^0_0 & \Gamma^0_1 & \Gamma^0_2 & \Gamma^0_3 \\ \Sigma^1_0 & \Sigma^1_1 & \Sigma^1_2 & \Sigma^1_3 & \Gamma^1_0 & \Gamma^1_1 & \Gamma^1_2 & \Gamma^1_3 \\ \Sigma^2_0 & \Sigma^2_1 & \Sigma^2_2 & \Sigma^2_3 & \Gamma^2_0 & \Gamma^2_1 & \Gamma^2_2 & \Gamma^2_3 \\ \Sigma^3_0 & \Sigma^3_1 & \Sigma^3_2 & \Sigma^3_3 & \Gamma^3_0 & \Gamma^3_1 & \Gamma^3_2 & \Gamma^3_3 \end{pmatrix}, \tag{7}$$

下面的定理是 $\mathbb{C}P^{2n+1}$ 曲面水平的一个等价条件。

定理 2.1 设 $\Phi: M \to \mathbb{C}P^{2n+1}$ 是一个浸入，则 Φ 水平当且仅当 $e^* \Sigma^0_0 = 0$，其中 $e: U \subset M \to Sp(n+1)$ 是沿 Φ 的活动标架。

证明 取 $e: U \subset M \to Sp(n+1)$ 是沿 Φ 的活动标架，则 $\pi_1 \circ e = \Phi$，其中 $\pi_1: Sp(n+1) \to \mathbb{C}P^{2n+1}$ 为自然投影。根据预备知识中的交换图，有 $\pi_2 = \pi \circ \pi_1$，所以

$$\pi_2 \circ e = \pi \circ \pi_1 \circ e = \pi \circ \Phi,$$

即 $e: U \subset M \to Sp(n+1)$ 也是一个沿 $\pi \circ \Phi: M \to \mathbb{H}P^n$ 的活动标架。

由式(2)，式(3)，式(6)和式(7)，有

$$(\pi \circ \Phi)^* \mathrm{d}s^2_{\mathbb{H}P^n} = \sum_{a=1}^{n} \bar{\gamma}^a_0 \cdot \gamma^a_0 + \sum_{a=1}^{n} \bar{\sigma}^a_0 \cdot \sigma^a_0,$$

$$\Phi^* \mathrm{d}s^2_{\mathbb{C}P^{2n+1}} = \sum_{a=1}^{n} \bar{\gamma}^a_0 \cdot \gamma^a_0 + \sum_{a=0}^{n} \bar{\sigma}^a_0 \cdot \sigma^a_0 = (\pi \circ \Phi)^* \mathrm{d}s^2_{\mathbb{H}P^n} + \bar{\sigma}^0_0 \cdot \sigma^0_0,$$

其中 $\gamma = e^* \Gamma, \sigma = e^* \Sigma$.

根据题设 Φ 水平，则 $\Phi^* \mathrm{d}s^2_{\mathbb{C}P^{2n+1}} = (\pi \circ \Phi)^* \mathrm{d}s^2_{\mathbb{H}P^n}$.

所以，Φ 水平当且仅当 $e^* \Sigma^0_0 = 0$. □

定理 2.1 是从度量的角度来刻画曲面水平的条件的，它与预备知识中的式(1)是从两个不同角度说明曲面水平，它们是等价的.

2.2 $\mathbb{C}P^7$ 中的水平全纯曲面

接下来考虑 $\Phi: M \to \mathbb{C}P^7$ 是一个水平极小浸入，其中 M 是一个黎曼面。

设 $\mathbb{C}P^7$ 中点的齐次坐标为 $[(z^0_1, z^1_1, z^2_1, z^3_1, z^0_2, z^1_2, z^2_2, z^3_2)^{\mathrm{T}}]$，令 U_i 表示 $\mathbb{C}P^7$ 中第 $(i+1)$ 个齐次坐标不为 0 的点集，$i = 0, 1, \cdots, 7$，则 $\{U_i\}^7_{i=0}$ 是 $\mathbb{C}P^7$ 的一个坐标覆盖。

由预备知识中的式(1)，我们知道 Φ 在 M 中

任意一点水平当且仅当 $\boldsymbol{\Phi}^*\boldsymbol{\sigma}=0$, 其中 $\boldsymbol{\sigma}=-z_2^{\mathrm{T}}\mathrm{d}z_1+z_1^{\mathrm{T}}\mathrm{d}z_2$.

情形 1: $\boldsymbol{\Phi}(M)\cap U_0\neq\varnothing$.

在坐标卡 U_0 中,令 $\boldsymbol{\Phi}=[(1,z_1^1,z_1^2,z_1^3,z_2^0,z_2^1,z_2^2,z_2^3)^{\mathrm{T}}]$,

$$\boldsymbol{\Phi}^*\boldsymbol{\sigma}=-(z_2^0,z_2^1,z_2^2,z_2^3)\mathrm{d}\begin{pmatrix}1\\z_1^1\\z_1^2\\z_1^3\end{pmatrix}+(1,z_1^1,z_1^2,z_1^3)\mathrm{d}\begin{pmatrix}z_2^0\\z_2^1\\z_2^2\\z_2^3\end{pmatrix}=$$

$$\mathrm{d}z_2^0+z_1^1\mathrm{d}z_2^1+z_1^2\mathrm{d}z_2^2+z_1^3\mathrm{d}z_2^3-z_2^1\mathrm{d}z_1^1-z_2^2\mathrm{d}z_1^2-z_2^3\mathrm{d}z_1^3=\mathrm{d}(z_2^0+z_1^1z_2^1+z_1^2z_2^2+z_1^3z_2^3)-2z_2^1\mathrm{d}z_1^1-2z_2^2\mathrm{d}z_1^2-2z_2^3\mathrm{d}z_1^3.$$

情形 1.1: z_1^1,z_1^2,z_1^3 均为常数

令 $z_1^1=a_1,z_1^2=a_2,z_1^3=a_3$,因为 $\mathrm{d}(z_2^0+a_1z_2^1+a_2z_2^2+a_3z_2^3)=0$,所以 $z_2^0+a_1z_2^1+a_2z_2^2+a_3z_2^3=a_4$($a_4$ 为常数)。假设 $z_2^1=g_1,z_2^2=g_2,z_2^3=g_3$,则 g_1,g_2,g_2 为 M 上的亚纯函数(特别地,可以为常数) 因为 $\boldsymbol{\Phi}$ 全纯。因此,此时有

$$\boldsymbol{\Phi}=[(1,a_1,a_2,a_3,a_4-a_1g_1-a_2g_2-a_3g_3,g_1,g_2,g_3)^{\mathrm{T}}].$$

情形 1.2: z_1^1,z_1^2,z_1^3 不全为常数

不失一般性,假设 z_1^3 不为常数,否则通过一个置换矩阵作用 $\boldsymbol{\Phi}$ 可转换为此情形,因此在相差一个置换矩阵作用的意义下,可以假设 z_1^3 不为常数。

设 $z_2^0+z_1^1z_2^1+z_1^2z_2^2+z_1^3z_3^2=g_0,z_1^1=g_1,z_1^2=g_2,z_1^3=g_3,z_2^1=g_4,z_2^2=g_5$,则 g_m 为 M 上的亚纯函数, $m=0,\cdots,5$. 由于 $\mathrm{d}(z_2^0+z_1^1z_2^1+z_1^2z_2^2+z_1^3z_2^3)=2z_2^1\mathrm{d}z_1^1+2z_2^2\mathrm{d}z_1^2+2z_2^3\mathrm{d}z_1^3$,因此 $z_2^3=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}g_0}{\mathrm{d}g_3}-g_4\frac{\mathrm{d}g_1}{\mathrm{d}g_3}-g_5\frac{\mathrm{d}g_2}{\mathrm{d}g_3}$。所以,此时有

$$\boldsymbol{\Phi}=[(1,g_1,g_2,g_3,g_0-g_1g_4-g_2g_5-g_3(\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}g_0}{\mathrm{d}g_3}-g_4\frac{\mathrm{d}g_1}{\mathrm{d}g_3}-g_5\frac{\mathrm{d}g_2}{\mathrm{d}g_3}),g_4,g_5,\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}g_0}{\mathrm{d}g_3}-g_4\frac{\mathrm{d}g_1}{\mathrm{d}g_3}-g_5\frac{\mathrm{d}g_2}{\mathrm{d}g_3})^{\mathrm{T}}],$$

特别的,此时 g_1,g_2,g_4 和 g_5 可以取常数.

情形 2: $\boldsymbol{\Phi}(M)\cap U_0=\varnothing,\boldsymbol{\Phi}(M)\cap U_1\neq\varnothing$

令 $\boldsymbol{\Phi}=[(0,1,z_1^2,z_1^3,z_2^0,z_2^1,z_2^2,z_2^3)^{\mathrm{T}}]$,

$$\boldsymbol{\Phi}^*\boldsymbol{\sigma}=-(z_2^0,z_2^1,z_2^2,z_2^3)\mathrm{d}\begin{pmatrix}0\\1\\z_1^2\\z_1^3\end{pmatrix}+(0,1,z_1^2,z_1^3)\mathrm{d}\begin{pmatrix}z_2^0\\z_2^1\\z_2^2\\z_2^3\end{pmatrix}$$

$$=\mathrm{d}z_2^1+z_1^2\mathrm{d}z_2^2+z_1^3\mathrm{d}z_2^3-z_2^2\mathrm{d}z_1^2-z_2^3\mathrm{d}z_1^3=\mathrm{d}(z_2^1+z_1^2z_2^2+z_1^3z_2^3)-2z_2^2\mathrm{d}z_1^2-2z_2^3\mathrm{d}z_1^3.$$

情形 2.1: z_1^2,z_1^3 均为常数

令 $z_1^2=a_1,z_1^3=a_2$,因为 $\mathrm{d}(z_2^1+a_1z_2^2+a_2z_2^3)=0$,所以 $z_2^1+a_1z_2^2+a_2z_2^3=a_3$($a_3$ 为常数)。令 $z_2^0=g_1,z_2^2=g_2,z_2^3=g_3$,则 g_1,g_2,g_2 为 M 上的亚纯函数(特别地,可以为常数)。所以,有

$$\boldsymbol{\Phi}=[(0,1,a_1,a_2,g_1,a_3-a_1g_2-a_2g_3,g_2,g_3)^{\mathrm{T}}].$$

情形 2.2: z_1^2, z_1^3 不全为常数

类似于情形 1.2, 可以假设 z_1^3 不为常数。

设 $z_2^1+z_1^2z_2^2+z_1^3z_2^3=g_0$, $z_1^2=g_1$, $z_1^3=g_2$, $z_2^0=g_3$, $z_2^2=g_4$, 则 g_m 为 M 上的 亚纯函数, $m=0,\cdots,4$. 由于 $\mathrm{d}(z_2^1+z_1^2z_2^2+z_1^3z_2^3)=2z_2^2\mathrm{d}z_1^2+2z_2^3\mathrm{d}z_1^3$, 因此, $z_2^3=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}g_0}{\mathrm{d}g_2}-g_4\frac{\mathrm{d}g_1}{\mathrm{d}g_2}$。所以, 此时有

$$\boldsymbol{\Phi}=[(0,1,g_1,g_2,g_3,g_0-g_1g_4-g_2(\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}g_0}{\mathrm{d}g_2}-g_4\frac{\mathrm{d}g_1}{\mathrm{d}g_2}),g_4,\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}g_0}{\mathrm{d}g_2}-g_4\frac{\mathrm{d}g_1}{\mathrm{d}g_2})^{\mathrm{T}}],$$

特别的, 此时 g_1, g_3 和 g_4 可以取常数.

情形 3: $\boldsymbol{\Phi}(M)\cap(U_0\cup U_1)=\varnothing,\boldsymbol{\Phi}(M)\cap U_2\neq\varnothing$

令 $\boldsymbol{\Phi}=[(0,0,1,z_1^3,z_2^0,z_2^1,z_2^2,z_2^3)^{\mathrm{T}}]$,

$$\boldsymbol{\Phi}^*\boldsymbol{\sigma}=-(z_2^0,z_2^1,z_2^2,z_2^3)\mathrm{d}\begin{pmatrix}0\\0\\1\\z_1^3\end{pmatrix}+(0,0,1,z_1^3)\mathrm{d}\begin{pmatrix}z_2^0\\z_2^1\\z_2^2\\z_2^3\end{pmatrix}$$

$$=\mathrm{d}z_2^2+z_1^3\mathrm{d}z_2^3-z_2^3\mathrm{d}z_1^3=\mathrm{d}(z_2^2+z_1^3z_2^3)-2z_2^3\mathrm{d}z_1^3.$$

情形 3.1: z_1^3 为常数

令 $z_1^3=a_1$,因为 $\mathrm{d}(z_2^2+a_1z_2^3)=0$,所以 $z_2^2+a_1z_2^3=a_2$(a_2 为常数)。令 $z_2^0=g_1$, $z_2^1=g_2$, $z_2^3=g_3$, 则 g_1, g_2, g_3 为 M 上的亚纯函数(特别地, 可以取常数)。所以, 有

$$\boldsymbol{\Phi}=[(0,0,1,a_1,g_1,g_2,a_2-a_1g_3,g_3)^{\mathrm{T}}].$$

情形 3.2: z_1^3 不为常数

设 $z_2^2+z_1^3z_2^3=g_0$, $z_1^3=g_1$, $z_2^0=g_2$, $z_2^2=g_3$, 则 g_m 为 M 上的 亚纯函数, $m=0,\cdots,3$. 由于 $\mathrm{d}(z_2^2+z_1^3z_2^3)=2z_2^3\mathrm{d}z_1^3$, 因此, $z_2^3=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}g_0}{\mathrm{d}g_1}$。所以, 此时有

$$\boldsymbol{\Phi}=[(0,0,1,g_1,g_2,g_3,g_0-\frac{1}{2}g_1\frac{\mathrm{d}g_0}{\mathrm{d}g_1},\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}g_0}{\mathrm{d}g_1})^{\mathrm{T}}],$$

特别的，此时 g_1，g_3 和 g_4 可以取常数.

情形 4： $\Phi(M) \cap (U_0 \cup U_1 \cup U_2) = \varnothing$，$\Phi(M) \cap U_3 \neq \varnothing$

令 $\Phi = [(0,0,0,1,z_2^0,z_2^1,z_2^2,z_2^3)^{\mathrm{T}}]$，

$$\Phi^*\sigma = -(z_2^0,z_2^1,z_2^2,z_2^3)\mathrm{d}\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} + (0,0,0,1)\mathrm{d}\begin{pmatrix}z_2^0\\z_2^1\\z_2^2\\z_2^3\end{pmatrix}$$

$$= \mathrm{d}z_2^3.$$

所以 $z_2^3 = a_1$ 为常数，设 $z_2^0 = g_1$，$z_2^1 = g_2$，$z_2^2 = g_2$，则 g_1，g_2 和 g_3 为亚纯函数(可以取常数)，所以

$$\Phi = [(0,0,0,1,g_1,g_2,g_3,a_1)^{\mathrm{T}}].$$

情形 5： $\Phi(M) \cap (U_0 \cup U_1 \cup U_2 \cup U_3) = \varnothing$，$\Phi(M) \cap U_4 \neq \varnothing$

令 $\Phi = [(0,0,0,0,1,z_2^1,z_2^2,z_2^3)^{\mathrm{T}}]$，此时 $\Phi^*\sigma = 0$ 恒成立。

令 $z_2^1 = g_1$，$z_2^2 = g_2$，$z_2^3 = g_3$，因此

$$\Phi = [(0,0,0,0,1,g_1,g_2,g_3)^{\mathrm{T}}].$$

情形 6： $\Phi(M) \cap (U_0 \cup U_1 \cup U_2 \cup U_3 \cup U_4) = \varnothing$，$\Phi(M) \cap U_5 \neq \varnothing$

令 $\Phi = [(0,0,0,0,0,1,z_2^2,z_2^3)^{\mathrm{T}}]$，则 $\Phi^*\sigma = 0$ 恒成立。设 $z_2^2 = g_1$，$z_2^3 = g_2$，因此

$$\Phi = [(0,0,0,0,0,1,g_1,g_2)^{\mathrm{T}}].$$

情形 7： $\Phi(M) \cap (U_0 \cup U_1 \cup U_2 \cup U_3 \cup U_4 \cup U_5) = \varnothing$，$\Phi(M) \cap U_6 \neq \varnothing$

令 $\Phi = [(0,0,0,0,0,0,1,z_2^3)^{\mathrm{T}}]$，则 $\Phi^*\sigma = 0$ 恒成立。设 $z_2^3 = g_1$，因此

$$\Phi = [(0,0,0,0,0,0,1,g_1)^{\mathrm{T}}].$$

情形 8： $\Phi(M) \cap (U_0 \cup U_1 \cup U_2 \cup U_3 \cup U_4 \cup U_5 \cup U_6) = \varnothing$，$\Phi(M) \cap U_7 \neq \varnothing$

此时 $\Phi = [(0,0,0,0,0,0,0,1)^{\mathrm{T}}]$ 退化，这与 Φ 是浸入矛盾。

综合上述 8 个情形，可以得到 $\mathbb{C}P^7$ 中水平全纯曲面在局部上的一个分类定理。

定理 2.2 假设 $\Phi: M \to \mathbb{C}P^7$ 为水平全纯曲面，则在相差一个置换矩阵作用的意义下，局部上 Φ 一定可以写成下列形式之一：

1) $\Phi = [(1,a_1,a_2,a_3,a_4 - a_1g_1 - a_2g_2 - a_3g_3,g_1,g_2,g_3)^{\mathrm{T}}]$；

2) $\Phi = [(1,g_1,g_2,g_3,g_0 - g_1g_4 - g_2g_5 - g_3(\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}g_0}{\mathrm{d}g_3} - g_4\frac{\mathrm{d}g_1}{\mathrm{d}g_3} - g_5\frac{\mathrm{d}g_2}{\mathrm{d}g_3}),g_4,g_5,\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}g_0}{\mathrm{d}g_3} - g_4\frac{\mathrm{d}g_1}{\mathrm{d}g_3} - g_5\frac{\mathrm{d}g_2}{\mathrm{d}g_3})^{\mathrm{T}}]$；

3) $\Phi = [(0,1,a_1,a_2,g_1,a_3 - a_1g_2 - a_2g_3,g_2,g_3)^{\mathrm{T}}]$；

4) $\Phi = [(0,1,g_1,g_2,g_3,g_0 - g_1g_4 - g_2(\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}g_0}{\mathrm{d}g_2} - g_4\frac{\mathrm{d}g_1}{\mathrm{d}g_2}),g_4,\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}g_0}{\mathrm{d}g_2} - g_4\frac{\mathrm{d}g_1}{\mathrm{d}g_2})^{\mathrm{T}}]$；

5) $\Phi = [(0,0,1,a_1,g_1,g_2,a_2 - a_1g_3,g_3)^{\mathrm{T}}]$；

6) $\Phi = [(0,0,1,g_1,g_2,g_3,g_0 - \frac{1}{2}g_1\frac{\mathrm{d}g_0}{\mathrm{d}g_1},\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}g_0}{\mathrm{d}g_1})^{\mathrm{T}}]$；

7) $\Phi = [(0,0,0,1,g_1,g_2,g_3,a_1)^{\mathrm{T}}]$；

8) $\Phi = [(0,0,0,0,1,g_1,g_2,g_3)^{\mathrm{T}}]$；

9) $\Phi = [(0,0,0,0,0,1,g_1,g_2)^{\mathrm{T}}]$；

10) $\Phi = [(0,0,0,0,0,0,1,g_1)^{\mathrm{T}}]$.

其中 g_m 为 M 上的亚纯函数，a_n 为常数，其中 $m = 0,\cdots,5$，$n = 1,\cdots,4$.

通过简单的直接计算可以验证定理 2.2 中所给出的 10 族共形极小曲面满足定理 2.1 中的条件。所以，对于 $\mathbb{C}P^7$ 中水平全纯曲面的构造可以采用定理 2.1 和式(1)中两种方式，二者是等价的。

定理 2.2 给出 $\mathbb{C}P^7$ 中水平全纯曲面的一个分类结果，接下来将利用该定理构造 $\mathbb{H}P^3$ 中的共形极小曲面。

2.3 $\mathbb{H}P^3$ 中的共形极小曲面

首先，介绍 Eells 和 Wood 的一个结论[9]。

引理 2.1 设 M,Y,N 为黎曼流形，$\pi: Y \to N$ 为黎曼淹没，$f: M \to Y$ 是关于映射 π 的一个水平浸入，如果 f 调和，则 $\pi \circ f: M \to N$ 也调和。

由于对于共形映射来说，映射调和等价于映射极小[5]，而 $\mathbb{C}P^7$ 中的全纯曲面是 $\mathbb{C}P^7$ 中的 Kaehler 子流形，Kaehler 子流形一定是极小的，因此，有

命题 2.1 设 $\Phi: M \to \mathbb{C}P^{2n+1}$ 是一个水平全纯曲面，则 $\pi \circ \Phi: M \to \mathbb{H}P^n$ 是共形极小的，其中 $\pi: \mathbb{C}P^{2n+1} \to \mathbb{H}P^n$ 为扭映射。

由命题 2.1 可知，定理 2.2 中给出的 $\mathbb{C}P^7$ 中的 10 族水平全纯曲面在扭映射下的像就是 $\mathbb{H}P^3$ 中的共形极小曲面。

例 1 设 g_m 为黎曼面 M 上的亚纯函数，a_n 为常数，$m = 0,\cdots,5$，$n = 1,\cdots,4$，那么有 $\mathbb{H}P^3$ 中的

10 族共形极小曲面如下:

1）$$\left[\begin{pmatrix}1\\a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}+\mathrm{j}\begin{pmatrix}a_4-a_1g_1-a_2g_2-a_3g_3\\g_1\\g_2\\g_3\end{pmatrix}\right]_{\mathbb{H}}:$$

$M\to\mathbb{H}P^3$;

2）$$\left[\begin{pmatrix}1\\g_1\\g_2\\g_3\end{pmatrix}+\mathrm{j}\begin{pmatrix}g_0-g_1g_4-g_2g_5-g_3\left(\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}g_0}{\mathrm{d}g_3}-g_4\frac{\mathrm{d}g_1}{\mathrm{d}g_3}-g_5\frac{\mathrm{d}g_2}{\mathrm{d}g_3}\right)\\g_4\\g_5\\\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}g_0}{\mathrm{d}g_3}-g_4\frac{\mathrm{d}g_1}{\mathrm{d}g_3}-g_5\frac{\mathrm{d}g_2}{\mathrm{d}g_3}\end{pmatrix}\right]_{\mathbb{H}}:$$

$M\to\mathbb{H}P^3$;

3）$$\left[\begin{pmatrix}0\\1\\a_1\\a_2\end{pmatrix}+\mathrm{j}\begin{pmatrix}g_1\\a_3-a_1g_2-a_2g_3\\g_2\\g_3\end{pmatrix}\right]_{\mathbb{H}}:M\to$$

$\mathbb{H}P^3$;

4）$$\left[\begin{pmatrix}0\\1\\g_1\\g_2\end{pmatrix}+\mathrm{j}\begin{pmatrix}g_3\\g_0-g_1g_4-g_2\left(\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}g_0}{\mathrm{d}g_2}-g_4\frac{\mathrm{d}g_1}{\mathrm{d}g_2}\right)\\g_4\\\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}g_0}{\mathrm{d}g_2}-g_4\frac{\mathrm{d}g_1}{\mathrm{d}g_2}\end{pmatrix}\right]_{\mathbb{H}}:$$

$M\to\mathbb{H}P^3$;

5）$$\left[\begin{pmatrix}0\\0\\1\\a_1\end{pmatrix}+\mathrm{j}\begin{pmatrix}g_1\\g_2\\a_2-a_1g_3\\g_3\end{pmatrix}\right]_{\mathbb{H}}:M\to\mathbb{H}P^3;$$

6）$$\left[\begin{pmatrix}0\\0\\1\\g_1\end{pmatrix}+\mathrm{j}\begin{pmatrix}g_2\\g_3\\g_0-\frac{1}{2}g_1\frac{\mathrm{d}g_0}{\mathrm{d}g_1}\\\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}g_0}{\mathrm{d}g_1}\end{pmatrix}\right]_{\mathbb{H}}:M\to\mathbb{H}P^3;$$

7）$$\left[\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}+\mathrm{j}\begin{pmatrix}g_1\\g_2\\g_3\\a_1\end{pmatrix}\right]_{\mathbb{H}}:M\to\mathbb{H}P^3;$$

8）$$\left[\mathrm{j}\begin{pmatrix}1\\g_1\\g_2\\g_3\end{pmatrix}\right]_{\mathbb{H}}:M\to\mathbb{H}P^3;$$

9）$$\left[\mathrm{j}\begin{pmatrix}0\\1\\g_1\\g_2\end{pmatrix}\right]_{\mathbb{H}}:M\to\mathbb{H}P^3;$$

10）$$\left[\mathrm{j}\begin{pmatrix}0\\0\\1\\g_1\end{pmatrix}\right]_{\mathbb{H}}:M\to\mathbb{H}P^3.$$

在上述例子中，可以选取不同形式的亚纯函数及常数，因此上面的 10 个例子非常丰富。而 $\mathbb{H}P^3$ 中极小曲面的分类依旧是一个很具有挑战性的研究课题，需要解决的问题还很多。

参考文献

[1] Yang K. Complete and compact minimal surfaces [M]. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1989.

[2] Bryant R L. Conformal and minimal immersions of compact surfaces into the 4-sphere [J]. Journal of Differential Geometry, 1982, 17(17): 455-473.

[3] Aithal A R. Harmonic maps from S^2 to $\mathbb{H}P^2$ [J]. Osaka Journal of Mathematics, 1986, 23(2): 255-270.

[4] Bahy-El-Dien A, Wood J C. The explicit construction of all harmonic two-spheres in quaternionic projective spaces [J]. Proceedings of the London Mathematical Society, 1991, S3/62(1): 202-224.

[5] Eells J, Sampson J H. Harmonic mappings of Riemannian manifolds [J]. American Journal of Mathematics, 1964, 86(1): 109-160.

[6] He L, Jiao X X. Classification of conformal minimal immersions of constant curvature from S^2 to $\mathbb{H}P^2$ [J]. Mathematische Annalen, 2014, 359(3/4): 1-32.

[7] He L, Jiao X X. On conformal minimal immersions of S^2 in $\mathbb{H}P^n$ with parallel second fundamental form [J], Annali di Matematica Pura ed Applicata, 2015, 194(5): 1-17.

[8] Cheeger J, Ebin D G. Comparison theorem in Riemannian geometry [M]. Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1975.

[9] Eells J, Wood J C. Harmonic maps from surfaces to complex projective spaces [J]. Advances in Mathematics, 1983, 49(3): 217-263.