文章编号:2095-6134(2018)06-0724-07

不可约单项式理想乘积的 Castelnuovo-Mumford 正则度*

宋娟娟,高玉彬†

(陕西师范大学数学与信息科学学院,西安 710062)

(2017 年 5 月 9 日收稿;2017 年 9 月 25 日收修改稿)

Song J J, Gao Y B. On the Castelnuovo – Mumford regularity of product of irreducible monomial ideals[J]. Journal of University of Chinese Academy of Sciences, 2018,35(6):724-730.

摘 要 对于域 k 上多元多项式环 $k[x_1,\cdots,x_n]$ 中不可约单项式理想 I、J、K 和 L,证明 $\mathrm{reg}(IJKL)\leqslant\mathrm{reg}(I)+\mathrm{reg}(J)+\mathrm{reg}(K)+\mathrm{reg}(L)$.

关键词 Castelnuovo-Mumford 正则度;完全交;理想的乘积

中图分类号:O154 **文献标志码:**A **doi:**10.7523/j.issn.2095-6134.2018.06.002

On the Castelnuovo-Mumford regularity of product of irreducible monomial ideals

SONG Juanjuan, GAO Yubin

(*College of Mathematics and Information Science, Shaanxi Normal University, Xi'an 710062, China*)

Abstract Let I, J, K, and L be irreducible monomial ideals in a polynomial ring over a field k. In this paper, we prove $\mathrm{reg}(IJKL)\leqslant\mathrm{reg}(I)+\mathrm{reg}(J)+\mathrm{reg}(K)+\mathrm{reg}(L)$.

Keywords Castelnuovo-Mumford regularity; complete intersection; product of ideals

设 S 是域 k 上的多元多项式环,m 是 S 的极大分次理想。对于有限生成分次 S-模 M,当 $H_m^i(M)\neq 0$ 时,令 $a_i(M)=\max\{\mu\mid[H_m^i(M)]_\mu\neq 0\}$;当 $H_m^i(M)=0$ 时,令 $a_i(M)=-\infty$. M 的 Castelnuovo-Mumford 正则度定义为

$$\mathrm{reg}(M)=\max_{i\geqslant 0}\{a_i(M)+i\}.$$

$\mathrm{reg}(M)$ 是一类重要的衡量 M 的复杂程度的不变量[1],得到它的上界是引人关注的问题。对 S 的一个齐次理想 I,IM 的极小齐次生成元的最大次数不超过 I 和 M 的相应极小齐次生成元的最大次数之和,所以研究 $\mathrm{reg}(IM)\leqslant\mathrm{reg}(I)+\mathrm{reg}(M)$ 是否成立是一个自然的问题。当 $\dim(S/I)\leqslant 1$ 时,Conca 和 Herzog[2] 证明 $\mathrm{reg}(IM)\leqslant\mathrm{reg}(I)+\mathrm{reg}(M)$. Sturmfels[3] 给出一个单项式理想 I,满足 $\mathrm{reg}(I^2)>2\mathrm{reg}(I)$。进一步限制理想 I 的范围,Conca 和 Herzog[2] 提出这样一个问题:当 $I_1,\cdots,I_d$ 都是完全交单项式理想时,

$$\mathrm{reg}(I_1,\cdots,I_d)\leqslant\mathrm{reg}(I_1)+\cdots+\mathrm{reg}(I_d)\quad(1)$$

是否对任意的 $d\geqslant 1$ 都成立?当 $d=2$ 时,Chardin 等[4] 证明了这一问题的正确性;当 $d\geqslant 3$ 时,这一问题至今没有得到解决。当 $d=3$ 且 I_1,I_2 和 I_3 都是由单个不定元的方幂生成的完全交理想时,

* 国家自然科学基金(11301315)资助
† 通信作者,E-mail:gaoyb@snnu.edu.cn

Gao[5]证明了结论的正确性。当 I 是一个完全交且 $n\geqslant 1$ 时,Tang 和 Gong[6]最近证明 $\mathrm{reg}(I^n)\leqslant n\mathrm{reg}(I)$。在本文中,对 4 个不可约单项式理想(由不定元的方幂生成的完全交理想)I, J, K 和 L, 证明

$$\mathrm{reg}(IJKL)\leqslant \mathrm{reg}(I)+\mathrm{reg}(J)+\mathrm{reg}(K)+\mathrm{reg}(L).$$

1　本研究的主要工具

本研究工作所用的主要工具[5]如下。

引理 1.1　设 $0\to N\to M\to P\to 0$ 是一个有限生成的分次 S-模的一个短正合列, 则

(i) $\mathrm{reg}(M)\leqslant\max\{\mathrm{reg}(N),\mathrm{reg}(P)\}$.

(ii) $\mathrm{reg}(P)\leqslant\max\{\mathrm{reg}(M),\mathrm{reg}(N)-1\}$.

(iii) $\mathrm{reg}(N)\leqslant\max\{\mathrm{reg}(M),\mathrm{reg}(P)+1\}$.

(iv) $\mathrm{reg}(P)=\mathrm{reg}(M)$, 如果 $\mathrm{reg}(N)<\mathrm{reg}(M)$.

(v) $\mathrm{reg}(P)=\mathrm{reg}(N)-1$, 如果 $\mathrm{reg}(M)<\mathrm{reg}(N)$.

引理 1.2　设 x 是一个线性形式,I 是 S 的一个齐次理想, 则对所有的 $n\geqslant 1$,

$$\mathrm{reg}(I)\leqslant\max\{\mathrm{reg}(I,x^n),\mathrm{reg}(I:x^n)+n\}.$$

引理 1.3　设 u 是一个次数为 d 的齐次多项式,I 是齐次理想且 u 是 S/I-正则的,那么

$$\mathrm{reg}(I,u)=\mathrm{reg}(I)+d-1.$$

下面的引理 1.4 和引理 1.5 分别对应 Gao[5]中的引理 3.1 和定理 3.2,为便于引用,将其列出。

引理 1.4　设 I, J, K 是域 k 上多元多项式环 S 中的 3 个不可约单项式理想, 则

$$\mathrm{reg}((IJ,IK,JK))\leqslant\mathrm{reg}(I)+\mathrm{reg}(J)+\mathrm{reg}(K)-1.$$

引理 1.5　设 I, J, K 是域 k 上多元多项式环 S 中的 3 个不可约单项式理想, 则

$$\mathrm{reg}(IJK)\leqslant\mathrm{reg}(I)+\mathrm{reg}(J)+\mathrm{reg}(K).$$

2　主要结果

S 的一个理想 I 称为一个完全交(complete intersection)单项式理想, 如果 I 可以由一些单项式生成,并且这些单项式之间没有公共的不定元。我们研究一类特殊的完全交单项式理想(不可约单项式理想), 即这些理想可以由单个不定元的方幂生成,例如 $I=(x_1^2,x_2^2,x_5^6)$。

引理 2.1　设 I, J, K, L 是域 k 上多元多项式环 S 中的 4 个不可约单项式理想, 则

$$\mathrm{reg}((IJ,IK,IL,JK,JL,KL))\leqslant\mathrm{reg}(I)+\mathrm{reg}(J)+\mathrm{reg}(K)+\mathrm{reg}(L)-2.$$

证明　对 $l_1+l_2+l_3+l_4$ 用归纳法, 这里 l_1, l_2,l_3,l_4 分别是 I, J, K 和 L 的最小的单项式生成元的基数。

如果 $l_1=l_2=l_3=l_4=1$,设 $I=(x^l)$,$J=(y^m)$,$K=(z^n)$,$L=(w^s)$,$l\geqslant m\geqslant n\geqslant s$ 且 x, y, z, w 两两不相等, 则 $(IJ,IK,IL,JK,JL,KL)=(x^ly^m,x^lz^n,x^lw^s,y^mz^n,y^mw^s,z^nw^s)$.

根据引理 1.2, 引理 1.3 及 Gao[5]的引理 3.1 和 Herzog[7]的推论 3.2,有

$$\begin{aligned}&\mathrm{reg}((IJ,IK,IL,JK,JL,KL))\\ \leqslant{}&\max\{\mathrm{reg}((x^ly^m,x^lz^n,y^mz^n,w^s)),\mathrm{reg}((x^l,y^m,z^n))+s\}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\mathrm{reg}((x^ly^m,x^lz^n,y^mz^n,w^s))\\ \leqslant{}&\mathrm{reg}(x^l)+\mathrm{reg}(y^m)+\mathrm{reg}(z^n)+s-2\\ ={}&\mathrm{reg}(I)+\mathrm{reg}(J)+\mathrm{reg}(K)+\mathrm{reg}(L)-2.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\mathrm{reg}((x^l,y^m,z^n))+s\\ \leqslant{}&\mathrm{reg}(x^l)+\mathrm{reg}(y^m)+\mathrm{reg}(z^n)+s-2\\ ={}&\mathrm{reg}(I)+\mathrm{reg}(J)+\mathrm{reg}(K)+\mathrm{reg}(L)-2.\end{aligned}$$

当 $x=y$, $x=y=z$, $x=y=z=w$ 时可以用相同的方法证明有相同的结论, 因此在这种情况下结论成立。

如果 $I=(I_1,x^m)$ 并且 x 是 S/I_1,S/J,S/K,S/L 的非零因子, 也就是 x 的任何方幂都不在 I_1, J,K,L 的最小单项式生成元中。则

$$\begin{aligned}&(IJ,IK,IL,JK,JL,KL)\\ ={}&(I_1,x^m)J+(I_1,x^m)K+(I_1,x^m)L+JK+JL+KL\\ ={}&I_1J+I_1K+I_1L+JK+JL+KL+x^mJ+x^mK+x^mL.\end{aligned}$$

根据引理 1.2,有

$$\begin{aligned}&\mathrm{reg}((IJ,IK,IL,JK,JL,KL))\\ \leqslant{}&\max\{\mathrm{reg}((IJ,IK,IL,JK,JL,KL,x^m)),\\ &\mathrm{reg}((IJ,IK,IL,JK,JL,KL):x^m)+m\}\\ ={}&\max\{\mathrm{reg}((I_1J,I_1K,I_1L,JK,JL,KL,x^m)),\\ &\mathrm{reg}((J,K,L))+m\}.\end{aligned}$$

注意到 x 是 $S/(I_1J,I_1K,I_1L,JK,JL,KL)$-正则的, 根据引理 1.3 和归纳假设,有

$$\begin{aligned}&\mathrm{reg}((I_1J,I_1K,I_1L,JK,JL,KL,x^m))\\ ={}&\mathrm{reg}((I_1J,I_1K,I_1L,JK,JL,KL))+m-1\end{aligned}$$

$\leqslant \mathrm{reg}(I_1) + \mathrm{reg}(J) + \mathrm{reg}(K) + \mathrm{reg}(L) + m - 3$
$= \mathrm{reg}(I) + \mathrm{reg}(J) + \mathrm{reg}(K) + \mathrm{reg}(L) - 2.$

上式成立是因为 $\mathrm{reg}(I) = \mathrm{reg}(I_1) + m - 1$. 根据 Herzog[7] 的推论 3.2, 有

$$\mathrm{reg}((J,K,L)) + m \leqslant \mathrm{reg}(J) + \mathrm{reg}(K) + \mathrm{reg}(L) + m - 2.$$

因此在这种情况下结论成立。

如果 $I = (I_1, x^m), J = (J_1, x^n), m \geqslant n \geqslant 1$ 且 x 是 $S/K, S/L$ - 正则的。则

$(IJ,IK,IL,JK,JL,KL) = (I_1,x^m)(J_1,x^n) + (I_1,x^m)K + (I_1,x^m)L + (J_1,x^n)K + (J_1,x^n)L + KL$
$= I_1J_1 + I_1K + I_1L + J_1K + J_1L + KL + x^nI_1 + x^mJ_1 + x^nK + x^nL + x^{m+n}.$

根据引理 1.2,有

$\mathrm{reg}((IJ,IK,IL,JK,JL,KL))$
$\leqslant \max\{\mathrm{reg}((I_1J_1,I_1K,I_1L,J_1K,J_1L,KL,x^nI_1, x^nK,x^nL,x^m)), \mathrm{reg}((I_1,J_1,K,L,x^n)) + m\}$
$\leqslant \max\{\mathrm{reg}((I_1J_1,I_1K,I_1L,J_1K,J_1L,KL,x^n)), \mathrm{reg}((I_1,K,L,x^{m-n}))+n, \mathrm{reg}((I_1,J_1,K,L,x^n))+m\}.$

根据归纳假设和 Herzog[7] 的推论 3.2,有

$\mathrm{reg}((I_1J_1,I_1K,I_1L,J_1K,J_1L,KL,x^n))$
$\leqslant \mathrm{reg}(I_1) + \mathrm{reg}(J) + \mathrm{reg}(K) + \mathrm{reg}(L) - 2.$
$\mathrm{reg}((I_1,K,L,x^{m-n})) + n$
$\leqslant \mathrm{reg}(I) + \mathrm{reg}(K) + \mathrm{reg}(L) - 2.$
$\mathrm{reg}((I_1,J_1,K,L,x^n)) + m$
$\leqslant \mathrm{reg}(I) + \mathrm{reg}(J) + \mathrm{reg}(K) + \mathrm{reg}(L) - 2.$

上面式子的成立是因为 $\mathrm{reg}(I) = \mathrm{reg}(I_1) + m - 1$ 和 $\mathrm{reg}(J) = \mathrm{reg}(J_1) + n - 1$.

因此在这种情况下结论是成立的。

如果 $I = (I_1, x^m), J = (J_1, x^n), K = (K_1, x^s)$, 并且 $m \geqslant n \geqslant s \geqslant 1$. 则有

(IJ,IK,IL,JK,JL,KL)
$= (I_1J_1,I_1K_1,I_1L,J_1K_1,J_1L,K_1L,x^sI_1,x^sJ_1,x^nK_1, x^sL,x^{n+s}).$

根据引理 1.2,有

$\mathrm{reg}((IJ,IK,IL,JK,JL,KL))$
$\leqslant \max\{\mathrm{reg}((I_1J_1,I_1K_1,I_1L,J_1K_1,J_1L,K_1L,x^sI_1, x^sJ_1,x^sL,x^n)), \mathrm{reg}((I_1,J_1,K_1,L,x^s)) + n\}$
$\leqslant \max\{\mathrm{reg}((I_1J_1,I_1K_1,I_1L,J_1K_1,J_1L,K_1L,x^s)), \mathrm{reg}((I_1,J_1,L,x^{n-s}))+s, \mathrm{reg}((I_1,J_1,K_1,L,x^s)) + n\}.$

根据归纳假设和引理 1.3 以及 Herzog[7] 的推论 3.2,有

$\mathrm{reg}((I_1J_1,I_1K_1,I_1L,J_1K_1,J_1L,K_1L,x^s))$
$\leqslant \mathrm{reg}(I_1) + \mathrm{reg}(J_1) + \mathrm{reg}(K_1) + \mathrm{reg}(L) + s - 3$
$= \mathrm{reg}(I_1) + \mathrm{reg}(J_1) + \mathrm{reg}(K) + \mathrm{reg}(L) - 2.$
$\mathrm{reg}((I_1,J_1,L,x^{n-s})) + s$
$\leqslant \mathrm{reg}(I_1) + \mathrm{reg}(J) + \mathrm{reg}(L) - 2.$
$\mathrm{reg}((I_1,J_1,K_1,L,x^s)) + n$
$\leqslant \mathrm{reg}(I_1) + \mathrm{reg}(J) + \mathrm{reg}(K) + \mathrm{reg}(L) - 2.$

因此在这种情况下结论是成立的。

如果 $I = (I_1, x^m), J = (J_1, x^n), K = (K_1, x^s), L = (L_1, x^z)$ 且 $m \geqslant n \geqslant s \geqslant z \geqslant 1$. 则有

$(IJ,IK,IL,JK,JL,KL) = (I_1J_1,I_1K_1,I_1L_1,J_1K_1, J_1L_1,K_1L_1,x^zI_1,x^zJ_1,x^zK_1,x^sL_1,x^{s+z}).$

根据引理 1.2,有

$\mathrm{reg}((IJ,IK,IL,JK,JL,KL))$
$\leqslant \max\{\mathrm{reg}((I_1J_1,I_1K_1,I_1L_1,J_1K_1,J_1L_1,K_1L_1,x^zI_1, x^zJ_1,x^zK_1,x^s)), \mathrm{reg}((I_1,J_1,K_1,L_1,x^z)) + s\}$
$\leqslant \max\{\mathrm{reg}((I_1J_1,I_1K_1,I_1L_1,J_1K_1,J_1L_1,K_1L_1,x^z)), \mathrm{reg}((I_1,J_1,K_1,x^{s-z}))+z, \mathrm{reg}((I_1,J_1,K_1,L_1,x^z))+s\}.$

根据归纳假设和引理 1.3 以及 Herzog[7] 的推论 3.2,有

$\mathrm{reg}((I_1J_1,I_1K_1,I_1L_1,J_1K_1,J_1L_1,K_1L_1,x^z))$
$\leqslant \mathrm{reg}(I_1) + \mathrm{reg}(J_1) + \mathrm{reg}(K_1) + \mathrm{reg}(L_1) + z - 3$
$= \mathrm{reg}(I_1) + \mathrm{reg}(J_1) + \mathrm{reg}(K_1) + \mathrm{reg}(L) - 2.$
$\mathrm{reg}((I_1,J_1,K_1,x^{s-z})) + z$
$\leqslant \mathrm{reg}(I_1) + \mathrm{reg}(J_1) + \mathrm{reg}(K) - 2.$
$\mathrm{reg}((I_1,J_1,K_1,L_1,x^z)) + s$
$\leqslant \mathrm{reg}(I_1) + \mathrm{reg}(J_1) + \mathrm{reg}(K) + \mathrm{reg}(L) - 2.$

因此在这种情况下结论是成立的。

综上,证明了当 I, J, K, L 是 S 中的 4 个不可约单项式理想时, 结论是成立的。

推论 2.1 设 I, J, K, L 是域 k 上多元多项式环 S 中的 4 个不可约单项式理想, 利用证明引理 2.1 的方法, 可以证明

$\mathrm{reg}((IJ,IK,IL,JK,JL))$
$\leqslant \mathrm{reg}(I) + \mathrm{reg}(J) + \mathrm{reg}(K) + \mathrm{reg}(L) - 2.$
$\mathrm{reg}((IJ,IK,IL,JK))$
$\leqslant \mathrm{reg}(I) + \mathrm{reg}(J) + \mathrm{reg}(K) + \mathrm{reg}(L) - 1.$
$\mathrm{reg}((IJK,IJL,IKL,JKL))$
$\leqslant \mathrm{reg}(I) + \mathrm{reg}(J) + \mathrm{reg}(K) + \mathrm{reg}(L) - 1.$
$\mathrm{reg}((IJ,IKL,JKL))$
$\leqslant \mathrm{reg}(I) + \mathrm{reg}(J) + \mathrm{reg}(K) + \mathrm{reg}(L) - 1.$
$\mathrm{reg}((IJ,IK,JKL))$

$\leqslant \operatorname{reg}(I)+\operatorname{reg}(J)+\operatorname{reg}(K)+\operatorname{reg}(L)-1.$

$\operatorname{reg}((IJ,IK,IL,JKL))$

$\leqslant \operatorname{reg}(I)+\operatorname{reg}(J)+\operatorname{reg}(K)+\operatorname{reg}(L)-1.$

$\operatorname{reg}((IJL,IKL,JKL))$

$\leqslant \operatorname{reg}(I)+\operatorname{reg}(J)+\operatorname{reg}(K)+\operatorname{reg}(L)-1.$

$\operatorname{reg}((IL,JKL))$

$\leqslant \operatorname{reg}(I)+\operatorname{reg}(J)+\operatorname{reg}(K)+\operatorname{reg}(L)-1.$

$\operatorname{reg}((IJK,IJL,IKL))$

$\leqslant \operatorname{reg}(I)+\operatorname{reg}(J)+\operatorname{reg}(K)+\operatorname{reg}(L)-1.$

注意：类似 (IJ,IK,IL,JK,JL) 的其他几种情况，即形如 (IK,IL,JK,JL,KL)，也满足上面的不等式。

定理 2.1　设 I, J, K, L 是域 k 上多元多项式环 S 中的 4 个不可约单项式理想，则

$$\operatorname{reg}(IJKL)\leqslant \operatorname{reg}(I)+\operatorname{reg}(J)+\operatorname{reg}(K)+\operatorname{reg}(L).$$

证明　关于 $l_1+l_2+l_3+l_4$ 用归纳法，这里 l_1,l_2,l_3,l_4 分别是 I, J, K, L 的最小的单项式生成元的基数。如果 $l_1=l_2=l_3=l_4=1$，则定理的证明是显然的。因为

$$\operatorname{reg}(IJKL)=\operatorname{reg}(I)+\operatorname{reg}(J)+\operatorname{reg}(K)+\operatorname{reg}(L).$$

如果 S 的一个变量 x 只出现在 I 的最小的单项式生成元中，而没有出现在 J, K 和 L 的最小的单项式生成元中。设 $I=(I_1,x^m)$, $m\geqslant 1$ 并且 x 是 S/I_1 − 正则的。则 $IJKL=I_1JKL+x^mJKL$ 并且 x^m 是 S/I_1JKL −正则的。根据引理 1.2 和引理 1.3。

$\operatorname{reg}(IJKL)\leqslant \max\{\operatorname{reg}((I_1JKL,x^m)),$

$\operatorname{reg}((I_1JKL,x^mJKL):x^m)+m\}$

$=\max\{\operatorname{reg}(I_1JKL)+m-1,\operatorname{reg}(JKL)+m\}.$

根据归纳假设，有

$\operatorname{reg}(I_1JKL)+m-1$

$\leqslant \operatorname{reg}(I_1)+\operatorname{reg}(J)+\operatorname{reg}(K)+\operatorname{reg}(L)+m-1$

$=\operatorname{reg}(I)+\operatorname{reg}(J)+\operatorname{reg}(K)+\operatorname{reg}(L).$

根据 Gao[5] 的定理 3.2，有

$\operatorname{reg}(JKL)+m\leqslant \operatorname{reg}(J)+\operatorname{reg}(K)+\operatorname{reg}(L)+m$

$\leqslant \operatorname{reg}(I)+\operatorname{reg}(J)+\operatorname{reg}(K)+\operatorname{reg}(L).$

因此定理的结论在这种情况下是成立的。

如果 S 的一个变量 x 出现在 I 和 J 的最小的单项式生成元中，而没有出现在 K 和 L 的最小的单项式生成元中。设 $I=(I_1,x^m)$, $J=(J_1,x^n)$ 且 $m\geqslant n$。则 $IJKL=I_1J_1KL+x^nI_1KL+x^mJ_1KL+x^{m+n}KL$。

根据引理 1.2

$\operatorname{reg}(IJKL)$

$\leqslant \max\{\operatorname{reg}((IJKL,x^m)),\operatorname{reg}((IJKL:x^m))+m\}$

$=\max\{\operatorname{reg}((I_1J_1KL,x^nI_1KL,x^m)),$

$\operatorname{reg}((I_1KL,J_1KL,x^nKL))+m\}.$

则上面最后一行的两个式子可以分写成

$\operatorname{reg}((I_1J_1KL,x^nI_1KL,x^m))$

$\leqslant \max\{\operatorname{reg}((I_1J_1KL,x^n)),\operatorname{reg}((I_1KL,x^{m-n}))+n\}.$

$\operatorname{reg}((I_1KL,J_1KL,x^nKL))+m$

$\leqslant \max\{\operatorname{reg}((I_1KL,J_1KL,x^n))+m,\operatorname{reg}(KL)+m+n\}.$

根据归纳假设，Gao[5] 的定理 3.2 和 x 的确没有出现在 I_1, J_1, K, L 的最小的单项式生成元中。有

$\operatorname{reg}((I_1J_1KL,x^n))$

$\leqslant \operatorname{reg}(I_1)+\operatorname{reg}(J_1)+\operatorname{reg}(K)+\operatorname{reg}(L)+n-1$

$=\operatorname{reg}(I_1)+\operatorname{reg}(J)+\operatorname{reg}(K)+\operatorname{reg}(L).$

$\operatorname{reg}((I_1KL,x^{m-n}))+n$

$=\operatorname{reg}(I_1KL)+m-1$

$\leqslant \operatorname{reg}(I_1)+\operatorname{reg}(K)+\operatorname{reg}(L)+m-1$

$=\operatorname{reg}(I)+\operatorname{reg}(K)+\operatorname{reg}(L).$

$\operatorname{reg}(KL)+m+n\leqslant \operatorname{reg}(K)+\operatorname{reg}(L)+m+n.$

注意到 I_1+J_1 也是一个不可约单项式理想，根据 Herzog[7] 的推论 3.2 和 Gao[5] 的定理 3.2，有

$\operatorname{reg}((I_1KL,J_1KL,x^n))+m$

$=\operatorname{reg}((I_1,J_1)KL)+m+n-1$

$\leqslant \operatorname{reg}(I_1,J_1)+\operatorname{reg}(K)+\operatorname{reg}(L)+m+n-1$

$\leqslant \operatorname{reg}(I_1)+\operatorname{reg}(J_1)+\operatorname{reg}(K)+\operatorname{reg}(L)+m+n-2$

$=\operatorname{reg}(I)+\operatorname{reg}(J)+\operatorname{reg}(K)+\operatorname{reg}(L).$

因此定理的结论在这种情况下是成立的。

如果 S 的一个变量 x 出现在 I, J, K 的最小的单项式生成元中，而没有出现在 L 的最小的单项式生成元中。设 $I=(I_1,x^m)$, $J=(J_1,x^n)$, $K=(K_1,x^s)$ 且 $m\geqslant n\geqslant s\geqslant 1$。则 $IJKL=(I_1J_1K_1L,x^sI_1J_1L,x^nI_1K_1L,x^mJ_1K_1L,x^{n+s}I_1L,x^{m+s}J_1L,x^{m+n}K_1L,x^{m+n+s}L)$。

首先假设 $m\leqslant n+s$，根据引理 1.2

$\operatorname{reg}(IJKL)$

$\leqslant\max\{\operatorname{reg}((IJKL,x^{n+s})),\operatorname{reg}((IJKL:x^{n+s}))+n+s\}$

$$=\max\{\operatorname{reg}((I_1J_1K_1L,x^sI_1J_1L,x^nI_1K_1L,x^mJ_1K_1L,x^{n+s})),\tag{2}$$

$$\operatorname{reg}((I_1L,J_1K_1L,x^{m-n}J_1L,x^{m-s}K_1L,x^mL))+n+s\}.\tag{3}$$

对式(2)，有

$$\mathrm{reg}((I_1J_1K_1L, x^sI_1J_1L, x^nI_1K_1L, x^mJ_1K_1L, x^{n+s}))$$
$$\leqslant \max\{\mathrm{reg}((I_1J_1K_1L, x^sI_1J_1L, x^nI_1K_1L, x^m)),$$
$$\mathrm{reg}((I_1J_1L, I_1K_1L, J_1K_1L, x^{n+s-m})) + m\}$$
$$\leqslant \max\{\mathrm{reg}((I_1J_1K_1L, x^sI_1J_1L, x^n)),$$
$$\mathrm{reg}((I_1J_1L, I_1K_1L, x^{m-n})) + n,$$
$$\mathrm{reg}((I_1J_1L, I_1K_1L, J_1K_1L, x^{n+s-m})) + m\}$$
$$\leqslant \max\{\mathrm{reg}((I_1J_1K_1L, x^s)), \mathrm{reg}((I_1J_1L, x^{n-s})) + s,$$
$$\mathrm{reg}((I_1J_1L, I_1K_1L, x^{m-n})) + n,$$
$$\mathrm{reg}((I_1J_1L, I_1K_1L, J_1K_1L, x^{n+s-m})) + m\}.$$

类似于前面几种情况，可以证明 $\mathrm{reg}((I_1J_1K_1L, x^s))$, $\mathrm{reg}((I_1J_1L, x^{n-s})) + s$, $\mathrm{reg}((I_1J_1L, I_1K_1L, x^{m-n})) + n$ 的值不会超过 $\mathrm{reg}(I) + \mathrm{reg}(J) + \mathrm{reg}(K) + \mathrm{reg}(L)$.

根据推论 2.1，有

$$\mathrm{reg}((I_1J_1L, I_1K_1L, J_1K_1L, x^{n+s-m})) + m$$
$$= \mathrm{reg}((I_1J_1L, I_1K_1L, J_1K_1L)) + n + s - 1$$
$$\leqslant \mathrm{reg}(I_1) + \mathrm{reg}(J_1) + \mathrm{reg}(K_1) + \mathrm{reg}(L) + n + s - 2$$
$$= \mathrm{reg}(I_1) + \mathrm{reg}(J) + \mathrm{reg}(K) + \mathrm{reg}(L)$$
$$\leqslant \mathrm{reg}(I) + \mathrm{reg}(J) + \mathrm{reg}(K) + \mathrm{reg}(L).$$

对式(3)，有

$$\mathrm{reg}((I_1L, J_1K_1L, x^{m-n}J_1L, x^{m-s}K_1L, x^mL)) + n + s$$
$$\leqslant \max\{\mathrm{reg}((I_1L, J_1K_1L, x^{m-n})) + n + s,$$
$$\mathrm{reg}((I_1L, J_1L, x^{n-s}K_1L, x^nL)) + m + s\}$$
$$\leqslant \max\{\mathrm{reg}((I_1L, J_1K_1L, x^{m-n})) + n + s,$$
$$\mathrm{reg}((I_1L, J_1L, x^{n-s})) + m + s,$$
$$\mathrm{reg}((I_1L, J_1L, K_1L, x^sL)) + m + n\}$$
$$\leqslant \max\{\mathrm{reg}((I_1L, J_1K_1L, x^{m-n})) + n + s,$$
$$\mathrm{reg}((I_1L, J_1L, x^{n-s})) + m + s, \mathrm{reg}(L) + m + n + s,$$
$$\mathrm{reg}((I_1L, J_1L, K_1L, x^s)) + m + n\}.$$

类似于前面几种情况，易证 $\mathrm{reg}(L) + m + n + s$, $\mathrm{reg}((I_1L, J_1L, x^{n-s})) + m + s$ 的值不会超过 $\mathrm{reg}(I) + \mathrm{reg}(J) + \mathrm{reg}(K) + \mathrm{reg}(L)$.

根据 Herzog[7] 的推论 3.2，有

$$\mathrm{reg}((I_1L, J_1L, K_1L, x^s)) + m + n$$
$$= \mathrm{reg}((I_1, J_1, K_1)L) + m + n + s - 1$$
$$\leqslant \mathrm{reg}(I_1) + \mathrm{reg}(J_1) + \mathrm{reg}(K_1) + \mathrm{reg}(L) + m + n + s - 3$$
$$= \mathrm{reg}(I) + \mathrm{reg}(J) + \mathrm{reg}(K) + \mathrm{reg}(L).$$

根据推论 2.1，有

$$\mathrm{reg}((I_1L, J_1K_1L, x^{m-n})) + n + s$$
$$= \mathrm{reg}((I_1L, J_1K_1L)) + m + s - 1$$
$$\leqslant \mathrm{reg}(I_1) + \mathrm{reg}(J_1) + \mathrm{reg}(K_1) + \mathrm{reg}(L) + m + s - 2$$
$$= \mathrm{reg}(I) + \mathrm{reg}(J_1) + \mathrm{reg}(K) + \mathrm{reg}(L).$$

所以当 $m \leqslant n + s$ 时，有 $\mathrm{reg}(IJKL) \leqslant \mathrm{reg}(I) + \mathrm{reg}(J) + \mathrm{reg}(K) + \mathrm{reg}(L)$。当 $m > n + s$ 时，同理可证 $\mathrm{reg}(IJKL) \leqslant \mathrm{reg}(I) + \mathrm{reg}(J) + \mathrm{reg}(K) + \mathrm{reg}(L)$ 成立。因此定理的结论在这种情况下是成立的。

如果 S 的一个变量 x 出现在 I, J, K, L 的最小的单项式生成元中，设 $I = (I_1, x^m)$, $J = (J_1, x^n)$, $K = (K_1, x^s)$, $L = (L_1, x^z)$ 且 $m \geqslant n \geqslant s \geqslant z \geqslant 1$ 则

$$IJKL = (I_1J_1K_1L_1, x^zI_1J_1K_1, x^sI_1J_1L_1, x^nI_1K_1L_1,$$
$$x^mJ_1K_1L_1, x^{s+z}I_1J_1, x^{n+z}I_1K_1, x^{n+s}I_1L_1,$$
$$x^{m+z}J_1K_1, x^{m+s}J_1L_1, x^{m+n}K_1L_1, x^{n+s+z}I_1,$$
$$x^{m+s+z}J_1, x^{m+n+z}K_1, x^{m+n+s}L_1, x^{m+n+s+z}).$$

首先假设 $m \leqslant s + z$，根据引理 1.2

$$\mathrm{reg}(IJKL) \leqslant \max\{\mathrm{reg}((IJKL, x^{n+s+z})),$$
$$\mathrm{reg}((IJKL : x^{n+s+z})) + n + s + z\}$$
$$= \max\{\mathrm{reg}((I_1J_1K_1L_1, x^zI_1J_1K_1, x^sI_1J_1L_1, x^nI_1K_1L_1,$$
$$x^mJ_1K_1L_1, x^{s+z}I_1J_1, x^{n+z}I_1K_1, x^{n+s}I_1L_1, x^{m+z}J_1K_1,$$
$$x^{m+s}J_1L_1, x^{m+n}K_1L_1, x^{n+s+z})), \tag{4}$$
$$\mathrm{reg}((I_1, J_1K_1, J_1L_1, K_1L_1, x^{m-n}J_1, x^{m-s}K_1, x^{m-z}L_1,$$
$$x^m)) + n + s + z\}. \tag{5}$$

对式(4)假设 $n + s \leqslant m + z$，有

$$\mathrm{reg}((I_1J_1K_1L_1, x^zI_1J_1K_1, x^sI_1J_1L_1, x^nI_1K_1L_1, x^mJ_1K_1L_1,$$
$$x^{s+z}I_1J_1, x^{n+z}I_1K_1, x^{n+s}I_1L_1, x^{m+z}J_1K_1, x^{m+s}J_1L_1, x^{m+n}K_1L_1, x^{n+s+z}))$$
$$\leqslant \max\{\mathrm{reg}((I_1J_1K_1L_1, x^zI_1J_1K_1, x^sI_1J_1L_1, x^nI_1K_1L_1, x^mJ_1K_1L_1,$$
$$x^{s+z}I_1J_1, x^{n+z}I_1K_1, x^{n+s}I_1L_1, x^{m+z}J_1K_1, x^{m+s}J_1L_1, x^{m+n})),$$
$$\mathrm{reg}((I_1J_1, I_1K_1, I_1L_1, J_1K_1, J_1L_1, K_1L_1, x^{s+z-m})) + m + n\}$$
$$\leqslant \max\{\mathrm{reg}((I_1J_1K_1L_1, x^zI_1J_1K_1, x^sI_1J_1L_1, x^nI_1K_1L_1, x^mJ_1K_1L_1,$$
$$x^{s+z}I_1J_1, x^{n+z}I_1K_1, x^{n+s}I_1L_1, x^{m+z}J_1K_1, x^{m+s})),$$
$$\mathrm{reg}((I_1J_1, I_1K_1, I_1L_1, J_1K_1, J_1L_1, x^{n-s})) + m + s,$$
$$\mathrm{reg}((I_1J_1, I_1K_1, I_1L_1, J_1K_1, J_1L_1, K_1L_1, x^{s+z-m})) + m + n\}$$
$$\leqslant \max\{\mathrm{reg}((I_1J_1K_1L_1, x^zI_1J_1K_1, x^sI_1J_1L_1, x^nI_1K_1L_1, x^mJ_1K_1L_1,$$
$$x^{s+z}I_1J_1, x^{n+z}I_1K_1, x^{n+s}I_1L_1, x^{m+z})),$$
$$\mathrm{reg}((I_1J_1, I_1K_1, I_1L_1, J_1K_1, x^{s-z})) + m + z,$$
$$\mathrm{reg}((I_1J_1, I_1K_1, I_1L_1, J_1K_1, J_1L_1, x^{n-s})) + m + s,$$
$$\mathrm{reg}((I_1J_1, I_1K_1, I_1L_1, J_1K_1, J_1L_1, K_1L_1, x^{s+z-m})) + m + n\}$$
$$\leqslant \max\{\mathrm{reg}((I_1J_1K_1L_1, x^zI_1J_1K_1, x^sI_1J_1L_1, x^nI_1K_1L_1, x^mJ_1K_1L_1,$$
$$x^{s+z}I_1J_1, x^{n+z}I_1K_1, x^{n+s})),$$
$$\mathrm{reg}((I_1J_1, I_1K_1, I_1L_1, J_1K_1L_1, x^{(m+z)-(n+s)})) + n + s,$$
$$\mathrm{reg}((I_1J_1, I_1K_1, I_1L_1, J_1K_1, x^{s-z})) + m + z,$$
$$\mathrm{reg}((I_1J_1, I_1K_1, I_1L_1, J_1K_1, J_1L_1, x^{n-s})) + m + s,$$

$$
\begin{aligned}
&\operatorname{reg}((I_1J_1,I_1K_1,I_1L_1,J_1K_1,J_1L_1,K_1L_1,x^{s+z-m}))+m+n\}\\
\leqslant \max\{&\operatorname{reg}((I_1J_1K_1L_1,x^zI_1J_1K_1,x^sI_1J_1L_1,x^nI_1K_1L_1,x^mJ_1K_1L_1,\\
&x^{s+z}I_1J_1,x^{n+z})),\operatorname{reg}((I_1J_1,I_1K_1,J_1K_1L_1,x^{s-z}))+n+z,\\
&\operatorname{reg}((I_1J_1,I_1K_1,I_1L_1,J_1K_1L_1,x^{(m+z)-(n+s)}))+n+s,\\
&\operatorname{reg}((I_1J_1,I_1K_1,I_1L_1,J_1K_1,x^{s-z}))+m+z,\\
&\operatorname{reg}((I_1J_1,I_1K_1,I_1L_1,J_1K_1,J_1L_1,x^{n-s}))+m+s,\\
&\operatorname{reg}((I_1J_1,I_1K_1,I_1L_1,J_1K_1,J_1L_1,K_1L_1,x^{s+z-m}))+m+n\}\\
\leqslant \max\{&\operatorname{reg}((I_1J_1K_1L_1,x^zI_1J_1K_1,x^sI_1J_1L_1,x^nI_1K_1L_1,\\
&x^mJ_1K_1L_1,x^{s+z})),\operatorname{reg}((I_1J_1,I_1K_1L_1,J_1K_1L_1,x^{n-s}))+s+z,\\
&\operatorname{reg}((I_1J_1,I_1K_1,J_1K_1L_1,x^{s-z}))+n+z,\\
&\operatorname{reg}((I_1J_1,I_1K_1,I_1L_1,J_1K_1L_1,x^{(m+z)-(n+s)}))+n+s,\\
&\operatorname{reg}((I_1J_1,I_1K_1,I_1L_1,J_1K_1,x^{s-z}))+m+z,\\
&\operatorname{reg}((I_1J_1,I_1K_1,I_1L_1,J_1K_1,J_1L_1,x^{n-s}))+m+s,\\
&\operatorname{reg}((I_1J_1,I_1K_1,I_1L_1,J_1K_1,J_1L_1,K_1L_1,x^{s+z-m}))+m+n\}\\
\leqslant \max\{&\operatorname{reg}((I_1J_1K_1L_1,x^zI_1J_1K_1,x^sI_1J_1L_1,x^nI_1K_1L_1,x^m)),\\
&\operatorname{reg}((I_1J_1K_1,I_1J_1L_1,I_1K_1L_1,J_1K_1L_1,x^{s+z-m}))+m,\\
&\operatorname{reg}((I_1J_1,I_1K_1L_1,J_1K_1L_1,x^{n-s}))+s+z,\\
&\operatorname{reg}((I_1J_1,I_1K_1,J_1K_1L_1,x^{s-z}))+n+z,\\
&\operatorname{reg}((I_1J_1,I_1K_1,I_1L_1,J_1K_1L_1,x^{(m+z)-(n+s)}))+n+s,\\
&\operatorname{reg}((I_1J_1,I_1K_1,I_1L_1,J_1K_1,x^{s-z}))+m+z,\\
&\operatorname{reg}((I_1J_1,I_1K_1,I_1L_1,J_1K_1,J_1L_1,x^{n-s}))+m+s,\\
&\operatorname{reg}((I_1J_1,I_1K_1,I_1L_1,J_1K_1,J_1L_1,K_1L_1,x^{s+z-m}))+m+n\}\\
\leqslant \max\{&\operatorname{reg}((I_1J_1K_1L_1,x^zI_1J_1K_1,x^sI_1J_1L_1,x^n)),\\
&\operatorname{reg}((I_1J_1K_1,I_1J_1L_1,I_1K_1L_1,x^{m-n}))+n,\\
&\operatorname{reg}((I_1J_1K_1,I_1J_1L_1,I_1K_1L_1,J_1K_1L_1,x^{s+z-m}))+m,\\
&\operatorname{reg}((I_1J_1,I_1K_1L_1,J_1K_1L_1,x^{n-s}))+s+z,\\
&\operatorname{reg}((I_1J_1,I_1K_1,J_1K_1L_1,x^{s-z}))+n+z,\\
&\operatorname{reg}((I_1J_1,I_1K_1,I_1L_1,J_1K_1L_1,x^{(m+z)-(n+s)}))+n+s,\\
&\operatorname{reg}((I_1J_1,I_1K_1,I_1L_1,J_1K_1,x^{s-z}))+m+z,\\
&\operatorname{reg}((I_1J_1,I_1K_1,I_1L_1,J_1K_1,J_1L_1,x^{n-s}))+m+s,\\
&\operatorname{reg}((I_1J_1,I_1K_1,I_1L_1,J_1K_1,J_1L_1,K_1L_1,x^{s+z-m}))+m+n\}\\
\leqslant \max\{&\operatorname{reg}((I_1J_1K_1L_1,x^zI_1J_1K_1,x^s)),\\
&\operatorname{reg}((I_1J_1K_1,I_1J_1L_1,x^{n-s}))+s,\\
&\operatorname{reg}((I_1J_1K_1,I_1J_1L_1,I_1K_1L_1,x^{m-n}))+n,\\
&\operatorname{reg}((I_1J_1K_1,I_1J_1L_1,I_1K_1L_1,J_1K_1L_1,x^{s+z-m}))+m,\\
&\operatorname{reg}((I_1J_1,I_1K_1L_1,J_1K_1L_1,x^{n-s}))+s+z,\\
&\operatorname{reg}((I_1J_1,I_1K_1,J_1K_1L_1,x^{s-z}))+n+z,\\
&\operatorname{reg}((I_1J_1,I_1K_1,I_1L_1,J_1K_1L_1,x^{(m+z)-(n+s)}))+n+s,\\
&\operatorname{reg}((I_1J_1,I_1K_1,I_1L_1,J_1K_1,x^{s-z}))+m+z,\\
&\operatorname{reg}((I_1J_1,I_1K_1,I_1L_1,J_1K_1,J_1L_1,x^{n-s}))+m+s,\\
&\operatorname{reg}((I_1J_1,I_1K_1,I_1L_1,J_1K_1,J_1L_1,K_1L_1,x^{s+z-m}))+m+n\}\\
\leqslant \max\{&\operatorname{reg}((I_1J_1K_1L_1,x^z)),\operatorname{reg}((I_1J_1K_1,x^{s-z}))+z,\\
&\operatorname{reg}((I_1J_1K_1,I_1J_1L_1,x^{n-s}))+s,\\
&\operatorname{reg}((I_1J_1K_1,I_1J_1L_1,I_1K_1L_1,x^{m-n}))+n,\\
&\operatorname{reg}((I_1J_1K_1,I_1J_1L_1,I_1K_1L_1,J_1K_1L_1,x^{s+z-m}))+m,\\
&\operatorname{reg}((I_1J_1,I_1K_1L_1,J_1K_1L_1,x^{n-s}))+s+z,\\
&\operatorname{reg}((I_1J_1,I_1K_1,J_1K_1L_1,x^{s-z}))+n+z,\\
&\operatorname{reg}((I_1J_1,I_1K_1,I_1L_1,J_1K_1L_1,x^{(m+z)-(n+s)}))+n+s,\\
&\operatorname{reg}((I_1J_1,I_1K_1,I_1L_1,J_1K_1,x^{s-z}))+m+z,\\
&\operatorname{reg}((I_1J_1,I_1K_1,I_1L_1,J_1K_1,J_1L_1,x^{n-s}))+m+s,\\
&\operatorname{reg}((I_1J_1,I_1K_1,I_1L_1,J_1K_1,J_1L_1,K_1L_1,x^{s+z-m}))+m+n\}.
\end{aligned}
$$

根据归纳假设和 Gao[5] 的引理 3.1 和定理 3.2 易证 $\operatorname{reg}((I_1J_1K_1L_1,x^z))$, $\operatorname{reg}((I_1J_1K_1,x^{s-z}))+z$, $\operatorname{reg}((I_1J_1K_1,I_1J_1L_1,x^{n-s}))+s$ 的值不会超过 $\operatorname{reg}(I)+\operatorname{reg}(J)+\operatorname{reg}(K)+\operatorname{reg}(L)$.

根据引理 2.1，有

$$
\begin{aligned}
&\operatorname{reg}((I_1J_1,I_1K_1,I_1L_1,J_1K_1,J_1L_1,K_1L_1,x^{s+z-m}))+m+n\\
&\leqslant \operatorname{reg}(I_1)+\operatorname{reg}(J_1)+\operatorname{reg}(K_1)+\operatorname{reg}(L_1)+n+s+z-3\\
&=\operatorname{reg}(I)+\operatorname{reg}(J)+\operatorname{reg}(K)+\operatorname{reg}(L).
\end{aligned}
$$

根据推论 2.1，有

$$
\begin{aligned}
&\operatorname{reg}((I_1J_1K_1,I_1J_1L_1,I_1K_1L_1,J_1K_1L_1,x^{s+z-m}))+m\\
&\leqslant \operatorname{reg}(I_1)+\operatorname{reg}(J_1)+\operatorname{reg}(K)+\operatorname{reg}(L).\\
&\operatorname{reg}((I_1J_1,I_1K_1L_1,J_1K_1L_1,x^{n-s}))+s+z\\
&\leqslant \operatorname{reg}(I_1)+\operatorname{reg}(J)+\operatorname{reg}(K_1)+\operatorname{reg}(L).\\
&\operatorname{reg}((I_1J_1,I_1K_1,J_1K_1L_1,x^{s-z}))+n+z\\
&\leqslant \operatorname{reg}(I_1)+\operatorname{reg}(J)+\operatorname{reg}(K)+\operatorname{reg}(L_1).\\
&\operatorname{reg}((I_1J_1,I_1K_1,I_1L_1,J_1K_1L_1,x^{(m+z)-(n+s)}))+n+s\\
&\leqslant \operatorname{reg}(I)+\operatorname{reg}(J_1)+\operatorname{reg}(K_1)+\operatorname{reg}(L).\\
&\operatorname{reg}((I_1J_1,I_1K_1,I_1L_1,J_1K_1,x^{s-z}))+m+z\\
&\leqslant \operatorname{reg}(I)+\operatorname{reg}(J_1)+\operatorname{reg}(K)+\operatorname{reg}(L_1).\\
&\operatorname{reg}((I_1J_1,I_1K_1,I_1L_1,J_1K_1,J_1L_1,x^{n-s}))+m+s\\
&\leqslant \operatorname{reg}(I)+\operatorname{reg}(J)+\operatorname{reg}(K_1)+\operatorname{reg}(L_1)-1.\\
&\operatorname{reg}((I_1J_1K_1,I_1J_1L_1,I_1K_1L_1,x^{m-n}))+n\\
&\leqslant \operatorname{reg}(I)+\operatorname{reg}(J_1)+\operatorname{reg}(K_1)+\operatorname{reg}(L_1)-1.
\end{aligned}
$$

对式(5)根据引理 1.2，有

$$
\begin{aligned}
&\operatorname{reg}((I_1,J_1K_1,J_1L_1,K_1L_1,x^{m-n}J_1,x^{m-s}K_1,x^{m-z}L_1,x^m))+\\
&\qquad n+s+z\\
&\leqslant \max\{\operatorname{reg}((I_1,J_1K_1,J_1L_1,K_1L_1,x^{m-n}J_1,x^{m-s}K_1,x^{m-z}))+\\
&\qquad n+s+z,\operatorname{reg}((I_1,J_1,K_1,L_1,x^z))+m+n+s\}\\
&\leqslant \max\{\operatorname{reg}((I_1,J_1K_1,J_1L_1,K_1L_1,x^{m-n}J_1,x^{m-s}))+\\
&\qquad n+s+z,\\
&\qquad \operatorname{reg}((I_1,J_1,K_1,x^{s-z}))+m+n+z,\\
&\qquad \operatorname{reg}((I_1,J_1,K_1,L_1,x^z))+m+n+s\}\\
&\leqslant \max\{\operatorname{reg}((I_1,J_1K_1,J_1L_1,K_1L_1,x^{m-n}))+n+s+z,\\
&\qquad \operatorname{reg}((I_1,J_1,K_1L_1,x^{n-s}))+m+s+z,\\
&\qquad \operatorname{reg}((I_1,J_1,K_1,x^{s-z}))+m+n+z,
\end{aligned}
$$

$\operatorname{reg}((I_1, J_1, K_1, L_1, x^z)) + m + n + s\}$.

根据 Herzog[7] 的推论 3.2,易证

$\operatorname{reg}((I_1, J_1, K_1 L_1, x^{n-s})) + m + s + z$,

$\operatorname{reg}((I_1, J_1, K_1, x^{s-z})) + m + n + z$,

$\operatorname{reg}((I_1, J_1, K_1, L_1, x^z)) + m + n + s$ 的值不会超过 $\operatorname{reg}(I) + \operatorname{reg}(J) + \operatorname{reg}(K) + \operatorname{reg}(L)$。根据 Gao[5] 的引理 3.1, 有

$$\begin{aligned}
&\operatorname{reg}((I_1, J_1 K_1, J_1 L_1, K_1 L_1, x^{m-n})) + n + s + z \\
&\leqslant \operatorname{reg}(I_1) + \operatorname{reg}((J_1 K_1, J_1 L_1, K_1 L_1)) + m + s + z - 2 \\
&\leqslant \operatorname{reg}(I_1) + \operatorname{reg}(J_1) + \operatorname{reg}(K_1) + \operatorname{reg}(L_1) + m + s + z - 3 \\
&= \operatorname{reg}(I) + \operatorname{reg}(J_1) + \operatorname{reg}(K) + \operatorname{reg}(L).
\end{aligned}$$

因此当 $n + s \leqslant m + z$ 时结论得证, 当 $n + s > m + z$ 时可以用相同的方法证明有相同的结论; 因此当 $m \leqslant s + z$ 时定理成立, 当 $m > s + z$ 时用相同的方法和完全类似的推导过程可以证明有相同的结论。

综上所述,定理被证明。

参考文献

[1] Bayer D, Mumford D. What can be computed in algebraic geoemetry? [C] // Eisenbud D, Robbiano L. Computational algebraic geometry and commutative algebra. Cambridge: Cambridge University Press, 1993: 1-48.

[2] Conca A, Herzog J. Castelnuovo-Mumford regularity of products of ideals[J]. Collect Math, 2003, 54(2):137-152.

[3] Sturmfels B. Four counterexamples in combinatorial algebraic geometry[J]. Journal of Algebra, 2000, 230(1): 282-294.

[4] Chardin M, Minh N C, Trung N V. On the regularity of products and intersections of complete intersections [J]. Proceedings of the American Mathematical Society, 2007, 135 (6):1 597-1 606.

[5] Gao Y B. On the regularity of product of pure power complete intersections[EB/OL]. 2018, Preprint. http: // arxiv. org/pdf/1806.07616v1. pdf.

[6] Tang Z M, Gong C. On the regularity of operations of ideals [J]. Communications in Algebra, 2016, 44(7):2 938-2 944.

[7] Herzog J. A generalization of the Taylor complex const-ruction [J]. Communications in Algebra, 2007, 35(5): 1 747-1 756.