

# 一类具有强奇性的矩阵型偏微分方程的正解的存在性\*

双震<sup>†</sup>, 孙义静

(中国科学院大学数学科学学院, 北京 100049)

(2018 年 1 月 22 日收稿; 2018 年 4 月 13 日收修改稿)

Shuang Z., Sun Y. J. Existence of positive solutions for matrix-type partial differential equations with strongly singular nonlinearities[J]. Journal of University of Chinese Academy of Sciences, 2019, 36(3): 311-319.

摘要 研究矩阵型强奇异偏微分方程

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(M(x)\nabla u) = f(x)u^{-p} + \lambda u^q, & \text{in } \Omega, \\ u > 0, & \text{in } \Omega, \\ u = 0, & \text{on } \partial\Omega, \end{cases}$$

其中,  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  是有界开集,  $M(x)$  是定义在  $\Omega$  上的实对称矩阵,  $-p < -1, 0 < q < 1, \lambda > 0$  是参数,  $f(x) \in L^1(\Omega), f(x) > 0$  a.e. in  $\Omega$ 。证明, 如果存在  $u_0 \in H_0^1(\Omega)$  满足  $\int_{\Omega} f(x) |u_0|^{1-p} dx < +\infty$ , 则对任意的  $\lambda > 0$  上述方程都有正  $H_0^1$ -解, 即慢速解。我们注意到, 对于奇异方程, 古典解即  $C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$  解不一定是  $H_0^1(\Omega)$  解。

关键词  $H_0^1$ -解; 实对称矩阵; 强奇性

中图分类号: 0175.29 文献标志码: A doi: 10.7523/j.issn.2095-6134.2019.03.003

## Existence of positive solutions for matrix-type partial differential equations with strongly singular nonlinearities

SHUANG Zhen, SUN Yijing

(School of Mathematical Sciences, University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China)

Abstract We investigate the strongly singular partial differential equations of matrix-type,

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(M(x)\nabla u) = f(x)u^{-p} + \lambda u^q, & \text{in } \Omega, \\ u > 0, & \text{in } \Omega, \\ u = 0, & \text{on } \partial\Omega, \end{cases}$$

where  $\Omega$  is a bound and open set in  $\mathbb{R}^n$ ,  $M(x)$  is a real symmetric matrix on  $\Omega$ ,  $-p < -1, 0 < q < 1, \lambda > 0$  are parameters,  $f(x) \in L^1(\Omega), f(x) > 0$  a.e. in  $\Omega$ . We prove that the above-mentioned equation admits at least one positive  $H_0^1$ -solution when  $\lambda > 0$  if there exists  $u_0 \in H_0^1(\Omega)$  such that  $\int_{\Omega} f(x) |u_0|^{1-p} dx < +\infty$ . It should be noted that a classical solution, namely, the  $C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ -solution, is not necessarily a  $H_0^1(\Omega)$ -solution for singular equations.

\* 国家自然科学基金(11571339, 11771468)资助  
<sup>†</sup> 通信作者, E-mail: shuangzhen16@mails.ucas.edu.cn

**Keywords**  $H_0^1$ -solution; real symmetric matrix; strong singularity

本文研究一类具有强奇性的矩阵型偏微分方程。

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(\mathbf{M}(x) \nabla u) = f(x) u^{-p} + \lambda u^q, & \text{in } \Omega, \\ u > 0, & \text{in } \Omega, \\ u = 0, & \text{on } \partial\Omega, \end{cases} \quad (1)$$

其中  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  是有界开集,  $\mathbf{M}(x)$  是  $\Omega$  上实对称矩阵, 满足存在正常数  $\alpha, \beta$  使得  $\mathbf{M}(x) \xi \cdot \xi \geq \alpha |\xi|^2$ ,  $|\det \mathbf{M}(x)| \leq \beta$ ,  $\forall \xi \in \mathbb{R}^n, \forall x \in \Omega$ ,  $-p < -1$ ,  $0 < q < 1$ ,  $f(x) \in L^1(\Omega)$ ,  $f(x) > 0$  a.e. in  $\Omega$ ,  $\lambda > 0$  是参数。

1991 年, 美国数学家 Lazer 和 McKenna<sup>[1]</sup> 研究一类特殊情形  $\mathbf{M}(x) \equiv I$ ,  $\lambda = 0$ , 即方程  $-\Delta u = h(x) u^{-p}$ . 得到如下结果: 如果  $h(x) \in C^\alpha(\bar{\Omega})$  ( $0 < \alpha < 1$ ),  $h(x) > 0, \forall x \in \bar{\Omega}$ , 那么对任一  $-p < 0$  方程存在唯一解  $u_{-p} \in C^{2+\alpha}(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ ,  $u_{-p}$  不属于  $C^1(\bar{\Omega})$  如果  $-p < -1$ ,  $u_{-p}$  属于  $H_0^1(\Omega)$  当且仅当  $-p > -3$ . 其实当  $-p < -1$  时  $u_{-p}$  的梯度在  $\partial\Omega$  处爆破, 当  $-p \leq -3$  时  $u_{-p}$  的梯度的爆破速度快到没有  $L^2$  可积性, 即  $\int_\Omega |\nabla u_{-p}|^2 dx = +\infty$ . 这就好像唯一解  $u_{-p}$  随着  $-p \rightarrow -\infty$  在  $\Omega$  的边界附近变得越来越陡峭。意大利数学家 Boccardo 和 Orsina<sup>[2]</sup> 证明当  $f(x)$  是非负  $L^1$  可积函数并且  $\lambda = 0$  时, 对任意的  $-p < -1$  方程存在  $H_{\text{loc}}^1(\Omega)$  解  $u$  且  $u^{\frac{1+p}{2}} \in H_0^1(\Omega)$ . 关于矩阵型方程的解的存在性问题, 其中矩阵的性质如前文所述, Boccardo 和其他数学家做出过大量研究, 详情可见文献[3-7]. 本文处理问题的主要思想来源于文献[8-11].

## 1 本文的结论

**定理 1.1** 设  $\Omega$  是  $\mathbb{R}^n$  中具有光滑边界的有界开集, 其中  $n \geq 3$ ,  $\mathbf{M}(x)$  是定义在  $\Omega$  上的实对称矩阵, 满足存在正常数  $\alpha, \beta$  使得  $\mathbf{M}(x) \xi \cdot \xi \geq \alpha |\xi|^2$ ,  $|\det \mathbf{M}(x)| \leq \beta$ ,  $\forall \xi \in \mathbb{R}^n, \forall x \in \Omega$ ,  $-p < -1$ ,  $0 < q < 1$ ,  $f(x) \in L^1(\Omega)$ ,  $f(x) > 0$  a.e. in  $\Omega$ . 如果存在  $u_0 \in H_0^1(\Omega)$  满足

$$\int_\Omega f(x) |u_0|^{1-p} dx < +\infty, \quad (2)$$

那么对每一个  $\lambda > 0$  方程 (1) 都有  $H_0^1(\Omega)$ -解。

**定理 1.2** 设  $\Omega$  是  $\mathbb{R}^n$  中包含原点的具有光滑边界的有界开集,  $n \geq 3$ ,  $\mathbf{M}(x)$  是  $\Omega$  上的实对称矩阵满足定理 1.1 中的条件,  $0 < \mu < n$ ,  $-3 < -p < -1$ , 则对任意的  $\lambda > 0$ , 在  $f(x) = |x|^{-\mu}$  的情况下方程 (1) 存在正解  $u_\lambda \in H_0^1(\Omega)$ .

注: 在定理 1.1 和定理 1.2 中, 要求  $\Omega$  具有光滑边界, 实际上只要  $\Omega$  具有锥性质就足够了。因为只需要保证 Sobolev 嵌入定理成立, 具体可见文献[12].

我们称  $u$  是方程 (1) 的  $H_0^1(\Omega)$ -解, 如果  $u \in H_0^1(\Omega)$ ,  $u > 0$  a.e. in  $\Omega$ , 满足  $\forall \varphi \in H_0^1(\Omega)$ ,

$$\int_\Omega \mathbf{M}(x) \nabla u \cdot \nabla \varphi dx - \int_\Omega \frac{f(x)}{u^p} \cdot \varphi dx - \lambda \int_\Omega u^q \varphi dx = 0.$$

由于  $\mathbf{M}(x)$  是实对称矩阵 ( $\mathbf{M}(x) \nabla u \cdot \nabla \varphi = \mathbf{M}(x) \nabla \varphi \cdot \nabla u$ ), 故考虑如下的能量泛函:

$$\begin{aligned} I(u) = & \frac{1}{2} \int_\Omega \mathbf{M}(x) \nabla u \cdot \nabla u dx + \\ & \frac{1}{p-1} \int_\Omega f(x) |u|^{1-p} dx - \\ & \frac{\lambda}{1+q} \int_\Omega |u|^{1+q} dx. \end{aligned} \quad (3)$$

需要注意, 由于强奇性 ( $-p < -1$ ), 泛函  $I$  在  $H_0^1(\Omega)$  上有奇性。我们将通过对如下两个约束集合之间的交替运用讨论方程 (1) 的可解性。

$$\begin{aligned} N_1 := & \left\{ u \in H_0^1(\Omega) : u > 0 \text{ a.e. in } \Omega \text{ and} \right. \\ & \left. \int_\Omega \mathbf{M}(x) \nabla u \cdot \nabla u dx - \int_\Omega f(x) u^{1-p} dx - \right. \\ & \left. \lambda \int_\Omega u^{1+q} dx \geq 0 \right\}, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} N_2 := & \left\{ u \in H_0^1(\Omega) : u > 0 \text{ a.e. in } \Omega \text{ and} \right. \\ & \left. \int_\Omega \mathbf{M}(x) \nabla u \cdot \nabla u dx - \int_\Omega f(x) u^{1-p} dx - \right. \\ & \left. \lambda \int_\Omega u^{1+q} dx = 0 \right\}. \end{aligned} \quad (5)$$

这里用  $\|\cdot\|$  表示  $H_0^1(\Omega)$  中常用的范数, 即

$$\|u\| = \left( \int_\Omega |\nabla u|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

## 2 定理的证明

先介绍一些引理。

**引理 2.1** 设  $\mathbf{M}(x)$  是定义  $\Omega$  上实对称矩阵, 满足存在正常数  $\alpha, \beta$  使得  $\mathbf{M}(x) \xi \cdot \xi \geq \alpha |\xi|^2$ ,  $|\det \mathbf{M}(x)| \leq \beta$ ,  $\forall \xi \in \mathbb{R}^n, \forall x \in \Omega$ ,

则

$$\begin{aligned} | \boldsymbol{M}(x) \boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\eta} | &\leq \frac{\beta}{\alpha^{n-1}} | \boldsymbol{\xi} | | \boldsymbol{\eta} |, \\ \forall x \in \Omega, \forall \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta} \in \mathbb{R}^n. \end{aligned} \tag{6}$$

**证明** 固定  $x \in \Omega$ 。因为  $\boldsymbol{M}(x)$  是实对称矩阵, 所以存在正交矩阵  $\boldsymbol{Q}(x)$  使得

$$\boldsymbol{Q}(x)^T \boldsymbol{M}(x) \boldsymbol{Q}(x) = \begin{pmatrix} \lambda_1(x) & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n(x) \end{pmatrix}$$

其中  $\lambda_i(x), i = 1, \cdots, n$  是矩阵  $\boldsymbol{M}(x)$  的特征值, 且  $\lambda_i(x) \geq \alpha > 0, i = 1, \cdots, n$ , 这是因为  $\lambda_i(x)$  是  $\boldsymbol{M}(x)$  的特征值, 所以存在  $x_0 \neq 0$ , 满足  $\boldsymbol{M}(x)x_0 = \lambda_i(x)x_0$ , 从而  $\alpha | x_0 |^2 \leq \boldsymbol{M}(x)x_0 \cdot x_0 = \lambda_i(x)x_0 \cdot x_0 = \lambda_i(x) | x_0 |^2$ , 故  $\lambda_i(x) \geq \alpha, i = 1 \cdots n$ 。

对任意  $\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta} \in \mathbb{R}^n$ , 令  $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{Q}^T \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{y} = \boldsymbol{Q}^T \boldsymbol{\eta}$ , 则  $\boldsymbol{M} \boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{x} \boldsymbol{Q}^T \boldsymbol{M} \boldsymbol{Q} \boldsymbol{y} = \lambda_1 x_1 y_1 + \lambda_2 x_2 y_2 + \cdots + \lambda_n x_n y_n$ , 故

$$\begin{aligned} | \boldsymbol{M} \boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\eta} | &= \left| \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i y_i \right| \\ &= \left| \left( \prod_{i=1}^n \lambda_i \right) \left( \frac{\lambda_1}{\prod \lambda_i} x_1 y_1 + \frac{\lambda_2}{\prod \lambda_i} x_2 y_2 + \cdots + \frac{\lambda_n}{\prod \lambda_i} x_n y_n \right) \right| \\ &= | \det \boldsymbol{M}(x) | \left| \left( \frac{\lambda_1}{\prod \lambda_i} x_1 y_1 + \frac{\lambda_2}{\prod \lambda_i} x_2 y_2 + \cdots + \frac{\lambda_n}{\prod \lambda_i} x_n y_n \right) \right| \\ &\leq \frac{\beta}{\alpha^{n-1}} | \boldsymbol{x} | | \boldsymbol{y} | = \frac{\beta}{\alpha^{n-1}} | \boldsymbol{\xi} | | \boldsymbol{\eta} |, \end{aligned}$$

因为  $| \boldsymbol{x} |^2 = \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{x} = (\boldsymbol{Q}^T \boldsymbol{\xi})^T \boldsymbol{Q}^T \boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}^T \boldsymbol{Q} \boldsymbol{Q}^T \boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}^T \boldsymbol{\xi} = | \boldsymbol{\xi} |^2$ , 同理  $| \boldsymbol{y} |^2 = | \boldsymbol{\eta} |^2$ 。□

**引理 2.2** 在  $H_0^1(\Omega)$  上定义  $\| u \|_1 = \left( \int_{\Omega} \boldsymbol{M}(x) \nabla u \cdot \nabla u \right)^{\frac{1}{2}}$ , 可证  $\| \cdot \|_1$  是  $H_0^1(\Omega)$  的范数且与  $\| \cdot \|$  范数等价, 从而对偶空间相同, 即

$$(H_0^1(\Omega), \| \cdot \|_1)^* = (H_0^1(\Omega), \| \cdot \|)^*。$$

**证明** 根据  $\boldsymbol{M}(x)$  的性质和引理 2.1, 可以得到

$$\begin{aligned} 0 &\leq \alpha \int_{\Omega} | \nabla u |^2 \leq \int_{\Omega} \boldsymbol{M}(x) \nabla u \cdot \nabla u \\ &\leq \int_{\Omega} | \boldsymbol{M}(x) \nabla u \cdot \nabla u | \leq \frac{\beta}{\alpha^{n-1}} \int_{\Omega} | \nabla u |^2 < + \infty. \end{aligned}$$

从而  $\| \cdot \|_1 : H_0^1(\Omega) \rightarrow [0, + \infty)$  是非负泛函, 而且知道如果  $\| \cdot \|_1$  是范数, 则必与范数  $\| \cdot \|$  等价。下面证明  $\| \cdot \|_1$  是  $H_0^1(\Omega)$  上的范数, 只需验证三角不等式, 其他显然。

$$\begin{aligned} \| u + v \|_1^2 &= \int_{\Omega} \boldsymbol{M}(x) \nabla(u + v) \cdot \nabla(u + v) \\ &= \int_{\Omega} \boldsymbol{M} \nabla u \cdot \nabla u + 2 \int_{\Omega} \boldsymbol{M} \nabla u \cdot \nabla v + \int_{\Omega} \boldsymbol{M} \nabla v \cdot \nabla v, \end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned} (\| u \|_1 + \| v \|_1)^2 &= \int_{\Omega} \boldsymbol{M} \nabla u \cdot \nabla u + \int_{\Omega} \boldsymbol{M} \nabla v \cdot \nabla v + 2 \left( \int_{\Omega} \boldsymbol{M} \nabla u \cdot \nabla u \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_{\Omega} \boldsymbol{M} \nabla v \cdot \nabla v \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

由于  $\boldsymbol{M}(x)$  是正定矩阵, 从而存在实可逆矩阵  $\boldsymbol{M}_1(x)$  使得  $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{M}_1^T \boldsymbol{M}_1$ , 从而

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \boldsymbol{M}(x) \nabla u \cdot \nabla v &\leq \int_{\Omega} | \boldsymbol{M}_1(x) \nabla u \cdot \boldsymbol{M}_1(x) \nabla v | \\ &\leq \int_{\Omega} | \boldsymbol{M}_1(x) \nabla u | \cdot | \boldsymbol{M}_1(x) \nabla v | \\ &\leq \left( \int_{\Omega} | \boldsymbol{M}_1(x) \nabla u |^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_{\Omega} | \boldsymbol{M}_1(x) \nabla v |^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left( \int_{\Omega} \boldsymbol{M}(x) \nabla u \cdot \nabla u \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_{\Omega} \boldsymbol{M}(x) \nabla v \cdot \nabla v \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \tag{8}$$

结合式(7), 可推得

$$\| u + v \|_1 \leq \| u \|_1 + \| v \|_1。$$

故  $\| \cdot \|_1$  是  $H_0^1(\Omega)$  的范数, 与范数  $\| \cdot \|$  等价。所以有

$$(H_0^1(\Omega), \| \cdot \|_1)^* = (H_0^1(\Omega), \| \cdot \|)^*。□$$

**引理 2.3**  $N_1$  是闭集。

**证明** 设  $u_i \rightarrow u(H_0^1(\Omega))$  且  $u_i \in N_1$ , 则存在  $u_i$  的子列(仍记为  $u_i$ ), 满足  $u_i(x) \rightarrow u(x)$  a.e. in  $\Omega$ 。由于  $u_i > 0$  a.e. in  $\Omega$ , 所以  $u \geq 0$  a.e. in  $\Omega$ 。由于  $u_i \in N_1, f(x) > 0$  a.e. in  $\Omega, \lambda > 0$  以及引理 2.1, 可知

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f(x) u_i^{1-p} dx &\leq \int_{\Omega} \boldsymbol{M}(x) \nabla u_i \cdot \nabla u_i \\ &\leq \frac{\beta}{\alpha^{n-1}} \int_{\Omega} | \nabla u_i |^2 dx, \end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned} \liminf_{i \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f(x) u_i^{1-p} dx &\leq \liminf_{i \rightarrow \infty} \frac{\beta}{\alpha^{n-1}} \int_{\Omega} | \nabla u_i |^2 dx \\ &= \frac{\beta}{\alpha^{n-1}} \int_{\Omega} | \nabla u |^2 dx < + \infty. \end{aligned}$$

根据 Fatou 引理知  $f(x) u^{1-p} = \liminf_{i \rightarrow \infty} f(x) u_i^{1-p}$  是  $\Omega$  内可积函数( $u > 0$  a.e. in  $\Omega$ ), 而且

$$\int_{\Omega} f(x) u^{1-p} dx \leq \liminf_{i \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f(x) u_i^{1-p} dx$$

$$\leq \liminf_{i \rightarrow \infty} \left[ \int_{\Omega} \mathbf{M}(x) \nabla u_i \cdot \nabla u_i dx - \frac{\lambda}{1+q} \int_{\Omega} u_i^{1+q} dx \right]. \quad (9)$$

因为  $H_0^1(\Omega) \rightarrow L^{1+q}(\Omega)$  是紧嵌入, 所以  $\int_{\Omega} u_i^{1+q} dx \rightarrow \int_{\Omega} u^{1+q} dx$ 。根据引理 2.2 可知  $\int_{\Omega} \mathbf{M}(x) \nabla u_i \cdot \nabla u_i dx \rightarrow \int_{\Omega} \mathbf{M}(x) \nabla u \cdot \nabla u dx$ 。再由式(9), 可得

$$\int_{\Omega} f(x) u^{1-p} dx \leq \int_{\Omega} \mathbf{M}(x) \nabla u \cdot \nabla u dx - \frac{\lambda}{1+q} \int_{\Omega} u^{1+q} dx,$$

所以  $u \in N_1$ 。因此  $N_1$  是闭集。  $\square$

**引理 2.4** 设  $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ , 满足

$$\int_{\Omega} f(x) |u_0|^{1-p} dx < +\infty,$$

则存在唯一的  $t_0 = t(u_0) > 0$ , 使得

1)  $I(t(u_0)u_0) \leq I(tu_0) \quad \forall t > 0$ , 即在  $t(u_0)$  点达到最小值;

2)  $t(u_0)u_0 \in N_2$ 。

**证明** 因为  $\int_{\Omega} f(x) |u_0|^{1-p} dx < +\infty$ ,  $-p < -1$ , 所以  $u_0 \neq 0$ , 从而有  $\int_{\Omega} \mathbf{M}(x) \nabla u_0 \cdot \nabla u_0 \geq \alpha \int_{\Omega} |\nabla u_0|^2 > 0$ 。又由于  $f(x) > 0$ , 可知  $\int_{\Omega} f(x) |u_0|^{1-p} > 0$ 。

$$\frac{dI(tu_0)}{dt} = t \int_{\Omega} \mathbf{M}(x) \nabla u_0 \cdot \nabla u_0 - t^{-p} \int_{\Omega} f(x) |u_0|^{1-p} -$$

$$\lambda t^q \int_{\Omega} |u_0|^{1+q}, \quad (10)$$

容易看出  $dI(tu_0)/dt$  在  $(0, +\infty)$  内有唯一零点, 记为  $t(u_0) = t_0$ , 而且在区间  $(0, t_0)$  内  $dI(tu_0)/dt < 0$ , 在区间  $(t_0, +\infty)$  内  $dI(tu_0)/dt > 0$ , 说明  $I(tu_0)$ ,  $\forall t > 0$  在  $(0, t_0]$  单调递减, 在  $[t_0, +\infty)$  单调递增, 所以  $I(tu_0)$ ,  $\forall t > 0$  在  $t_0$  处取得最小值, 从而式(1)成立。另外还可得到

$$t_0^2 \int_{\Omega} \mathbf{M}(x) \nabla u_0 \cdot \nabla u_0 dx - t_0^{1-p} \int_{\Omega} f(x) |u_0|^{1-p} dx - \lambda t_0^{1+q} \int_{\Omega} |u_0|^{1+q} dx = 0, \quad (11)$$

所以  $t(u_0)u_0 \in N_2$ 。  $\square$

**引理 2.5** 泛函  $I$  在  $N_1$  中下半连续。

**证明** 设  $u_i \rightarrow u$  ( $H_0^1(\Omega)$ ) 且  $u_i \in N_1$ , 要证

$$I(u) \leq \liminf_{i \rightarrow \infty} I(u_i). \quad (12)$$

同引理 2.3 中的证明, 由 Fatou 引理可知对  $u_i$  的

一个子列成立(仍记为  $u_i$ )

$$\frac{1}{p-1} \int_{\Omega} f(x) u^{1-p} dx \leq \liminf_{i \rightarrow \infty} \frac{1}{p-1} \int_{\Omega} f(x) u_i^{1-p} dx.$$

通过  $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{1+q}(\Omega)$  是紧嵌入以及引理 2.2 即得式(12)。  $\square$

**引理 2.6** 存在常数  $C_0 > 0$ , 使得  $\forall u \in N_1$ ,  $\|u\| \geq C_0$ 。

**证明** 设  $u \in N_1$ , 则

$$\frac{\beta}{\alpha^{n-1}} \|u\|^2 \geq \int_{\Omega} |\mathbf{M}(x) \nabla u \cdot \nabla u| \geq \int_{\Omega} f(x) u^{1-p}.$$

由反向 Hölder 不等式和 Poincaré 不等式可以得到

$$\int_{\Omega} f(x) u^{1-p} dx \geq \left( \int_{\Omega} f(x)^{\frac{1}{p}} \right)^p \left( \int_{\Omega} u \right)^{1-p},$$

$$\int_{\Omega} u dx \leq \left( \int_{\Omega} u^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} |\Omega|^{\frac{1}{2}},$$

$$\left( \int_{\Omega} u dx \right)^{1-p} \geq C \|u\|^{1-p}.$$

从而可以得到

$$\|u\| \geq C_0.$$

(这里  $C_0$  与  $\Omega, \beta, \alpha, p, f(x)$  有关。)  $\square$

**引理 2.7** 定义  $J(u) = \int_{\Omega} \mathbf{M}(x) \nabla u \cdot \nabla \varphi dx$ , 则

$J(u)$ ,  $\forall u \in H_0^1(\Omega)$  是有界线性泛函。

**证明** 根据引理 2.1 和 Hölder 不等式, 可得  $\mathbf{M}(x) \nabla u \cdot \nabla \varphi$  可积。  $J(u)$  显然是线性的, 下面只需证明有界性。

由于  $\mathbf{M}(x)$  是正定矩阵, 所以存在可逆矩阵  $\mathbf{M}_1(x)$ , 使得  $\mathbf{M} = \mathbf{M}_1^T \mathbf{M}_1$  成立, 从而有

$$\begin{aligned} |J(u)| &= \left| \int_{\Omega} \mathbf{M}(x) \nabla u \cdot \nabla \varphi \right| \\ &\leq \int_{\Omega} |\mathbf{M}_1(x) \nabla u \cdot \mathbf{M}_1(x) \nabla \varphi| \\ &\leq \int_{\Omega} |\mathbf{M}_1(x) \nabla u| \cdot |\mathbf{M}_1(x) \nabla \varphi| \\ &\leq \left( \int_{\Omega} |\mathbf{M}_1(x) \nabla u|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_{\Omega} |\mathbf{M}_1(x) \nabla \varphi|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left( \int_{\Omega} \mathbf{M}(x) \nabla u \cdot \nabla u \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_{\Omega} \mathbf{M}(x) \nabla \varphi \cdot \nabla \varphi \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \frac{\beta}{\alpha^{n-1}} \|u\| \|\varphi\|. \end{aligned} \quad \square$$

接下来开始定理 1.1 的证明。

**定理 1.1 的证明** 由引理 2.3, 2.4 和 2.5, 可知  $N_1$  是闭集,  $N_1$  非空,  $I$  在  $N_1$  上有定义而且下半连续。因为  $\forall u \in N_1$  有

$$I(u) \geq \frac{1}{2} \int_{\Omega} \mathbf{M}(x) \nabla u \cdot \nabla u dx - \frac{\lambda}{1+q} \int_{\Omega} u^{1+q} dx$$

$$\geq \frac{\alpha}{2} \|u\|^2 - C \|u\|^{1+q}, \quad (13)$$

所以  $I$  在  $N_1$  上有下界。从而根据 Ekeland 变分原理,可取最优化极小值序列,即存在序列  $\{u_i\} \subset N_1$ , 使得

$$\begin{aligned} 1) \quad & I(u_i) < \inf_{N_1} I + \frac{1}{i}; \\ 2) \quad & I(w) \geq I(u_i) - \frac{1}{i} \|w - u_i\|, \forall w \in N_1. \end{aligned} \quad (14)$$

由于  $I$  在  $N_1$  上强制,可知  $\{u_i\}$  有界,即存在  $M > 0$ , 使得  $\|u_i\| \leq M$ , 从而存在  $u_i$  的一个子列(仍记为  $u_i$ ), 存在  $u^* \in H_0^1(\Omega)$ , 成立

$$u_i \rightharpoonup u^* \quad \text{in } H_0^1(\Omega), \quad (15)$$

$$u_i \rightarrow u^* \quad \text{in } L^r(\Omega), \quad \forall r \in \left[1, \frac{2n}{n-2}\right), \quad (16)$$

$$u_i(x) \rightarrow u^*(x) \quad \text{a.e. in } \Omega. \quad (17)$$

下面证明  $\inf_{N_1} I = \inf_{N_2} I$ 。根据引理 2.1 可知,  $\forall u \in N_1$  有

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f(x) |u|^{1-p} &\leq \int_{\Omega} |M(x) \nabla u \cdot \nabla u| \\ &\leq \frac{\beta}{\alpha^{n-1}} \|u\|^2 < +\infty. \end{aligned}$$

从而由引理 2.4 可知,存在唯一的正实数  $t(u)$ , 使得  $t(u)u \in N_2$  而且  $I(t(u)u) \leq I(u)$ , 进而  $I(u) \geq \inf_{N_2} I$ 。所以  $\inf_{N_1} I \geq \inf_{N_2} I$ 。又因为  $N_2 \subset N_1$ , 故  $\inf_{N_2} I \geq \inf_{N_1} I$ , 从而知

$$\inf_{N_1} I = \inf_{N_2} I.$$

下面需要分两种情况讨论。

**情况 1**  $\{u_i\}$  中有一个子列位于  $N_2$  内(下面仍把这个子列记为  $u_i$ )。

固定  $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ ,  $\varphi \geq 0$ 。设  $t \geq 0$ , 因为

$$\int_{\Omega} f(x) (u_i + t\varphi)^{1-p} \leq \int_{\Omega} f(x) u_i^{1-p} < +\infty$$

根据引理 2.4, 可知存在唯一的正实数, 记为  $f_{i,\varphi}(t)$ , 满足

$$\begin{cases} I[f_{i,\varphi}(t)(u_i + t\varphi)] \leq I[\theta(u_i + t\varphi)], \quad \forall \theta > 0, \\ f_{i,\varphi}(t)(u_i + t\varphi) \in N_2. \end{cases}$$

下面证明  $f_{i,\varphi}(t)$  在  $t \geq 0$  上连续。记

$$g(t) := \int_{\Omega} M(x) \nabla(u_i + t\varphi) \cdot \nabla(u_i + t\varphi) dx, \quad \forall t \geq 0,$$

$$h(t) := \int_{\Omega} f(x) |u_i + t\varphi|^{1-p} dx, \quad \forall t \geq 0,$$

$$k(t) := \int_{\Omega} |u_i + t\varphi|^{1+q} dx, \quad \forall t \geq 0.$$

根据引理 2.2, 控制收敛定理以及  $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{1+q}(\Omega)$ , 可以证明  $g(t), h(t), k(t)$  都是连续的。由  $f_{i,\varphi}(t)(u_i + t\varphi) \in N_2$ , 可得

$$f_{i,\varphi}^{1-q}(t)g(t) = f_{i,\varphi}^{-p-q}(t)h(t) + \lambda k(t). \quad (18)$$

任取  $t_0 \in [0, +\infty)$ , 考虑函数

$$f(x) := x^{1-q}g(t_0) - \frac{1}{x^{p+q}}h(t_0) + \lambda k(t_0).$$

能够得到  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  内严格递增且在  $(0, +\infty)$  内有唯一零点, 即  $f_{i,\varphi}(t_0)$ 。从而  $f_{i,\varphi}(t)$  在  $t \geq 0$  上连续。

因为从引理 2.4 的证明中可以看出  $f_{i,\varphi}(0)$  是  $\frac{dI(tu_i)}{dt}$  的唯一零点, 又由于  $u_i \in N_2$ , 所以得到  $f_{i,\varphi}(0) = 1$ 。

**定义**

$$f'_{i,\varphi}(0) := \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f_{i,\varphi}(t) - 1}{t} \in [-\infty, +\infty],$$

如果极限不存在, 可取  $t_k \rightarrow 0^+$ , 记  $f'_{i,\varphi}(0) := \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{f_{i,\varphi}(t_k) - 1}{t_k}$ , 在  $[-\infty, +\infty]$  内取值。

下面证明  $f'_{i,\varphi}(0)$  有界。由于  $f_{i,\varphi}(t)(u_i + t\varphi) \in N_2$  和  $u_i \in N_2$ , 可得

$$\begin{aligned} 0 &= f_{i,\varphi}^2(t) \int_{\Omega} M(x) \nabla(u_i + t\varphi) \cdot \nabla(u_i + t\varphi) - \\ &\quad f_{i,\varphi}^{1-p}(t) \int_{\Omega} f(x) (u_i + t\varphi)^{1-p} - \\ &\quad \lambda f_{i,\varphi}^{1+q}(t) \int_{\Omega} (u_i + t\varphi)^{1+q} - \\ &\quad \int_{\Omega} M(x) \nabla u_i \cdot \nabla u_i + \int_{\Omega} f(x) u_i^{1-p} + \lambda \int_{\Omega} u_i^{1+q} \\ &= (f_{i,\varphi}^2(t) - 1) \int_{\Omega} M(x) \nabla(u_i + t\varphi) \cdot \nabla(u_i + t\varphi) + \\ &\quad 2t \int_{\Omega} M(x) \nabla u_i \cdot \nabla \varphi + t^2 \int_{\Omega} M(x) \nabla \varphi \cdot \nabla \varphi - \\ &\quad (f_{i,\varphi}^{1-p}(t) - 1) \int_{\Omega} f(x) (u_i + t\varphi)^{1-p} - \\ &\quad \int_{\Omega} f(x) ((u_i + t\varphi)^{1-p} - u_i^{1-p}) - \\ &\quad \lambda (f_{i,\varphi}^{1+q}(t) - 1) \int_{\Omega} (u_i + t\varphi)^{1+q} - \\ &\quad \lambda \int_{\Omega} (u_i + t\varphi)^{1+q} - u_i^{1+q} dx. \end{aligned}$$

从而利用  $-p < -1$ ,  $u_i > 0$ ,  $t > 0$ ,  $\varphi \geq 0$ ,  $f > 0$ , 知

$$0 \geq \frac{f_{i,\varphi}(t) - 1}{t}$$

$$\begin{aligned} & \left\{ (f_{i,\varphi}(t) + 1) \int_{\Omega} \mathbf{M}(x) \nabla(u_i + t\varphi) \cdot \nabla(u_i + t\varphi) - \right. \\ & (1-p)(1+o(1))^{-p} \int_{\Omega} f(x)(u_i + t\varphi)^{1-p} - \\ & \left. \lambda(1+q)(1+o(1))^q \int_{\Omega} (u_i + t\varphi)^{1+q} \right\} + \\ & 2 \int_{\Omega} \mathbf{M}(x) \nabla u_i \cdot \nabla \varphi + t \int_{\Omega} \mathbf{M}(x) \nabla \varphi \cdot \nabla \varphi - \\ & \lambda \int_{\Omega} \frac{(u_i + t\varphi)^{1+q} - u_i^{1+q}}{t} dx, \end{aligned} \quad (19)$$

其中  $o(1)$  表示当  $t \rightarrow 0^+$  时的无穷小。利用控制收敛定理可以证明当  $t \rightarrow 0^+$  时,

$$\int_{\Omega} \frac{(u_i + t\varphi)^{1+q} - u_i^{1+q}}{t} dx \rightarrow (1+q) \int_{\Omega} u_i^q \varphi dx.$$

利用前面 4 个函数的连续性以及  $u_i \in N_2$ , 在式 (19) 两边令  $t \rightarrow 0^+$  可得到

$$\begin{aligned} & \lambda(1+q) \int_{\Omega} u_i^q \varphi - 2 \int_{\Omega} \mathbf{M}(x) \nabla u_i \cdot \nabla \varphi \geq f'_{i,\varphi}(0) \\ & \left[ (1-q) \int_{\Omega} \mathbf{M}(x) \nabla u_i \cdot \nabla u_i + (p+q) \int_{\Omega} f(x) u_i^{1-p} \right]. \end{aligned} \quad (20)$$

利用 Hölder 不等式, 引理 2.1,  $\mathbf{M}(x)$  的性质以及  $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{1+q}(\Omega)$ , 可以得到一系列不等式,

$$\begin{cases} \int_{\Omega} u_i^q \varphi dx \leq \|u_i\|_{L^{1+q}(\Omega)}^q \|\varphi\|_{L^{1+q}(\Omega)} \\ \leq C \|u_i\|^q \|\varphi\| \leq C \|\varphi\|, \\ \left| \int_{\Omega} \mathbf{M}(x) \nabla u_i \cdot \nabla \varphi \right| \leq \frac{\beta}{\alpha^{n-1}} \|u_i\| \|\varphi\| \\ \leq C \|\varphi\|, \\ (1-q) \int_{\Omega} \mathbf{M}(x) \nabla u_i \cdot \nabla u_i + (p+q) \int_{\Omega} f(x) u_i^{1-p} \\ \geq (1-q) \alpha C_0^2, \end{cases}$$

其中还用到引理 2.6 和  $\{u_i\}$  是有界的。结合式 (20) 得到  $f'_{i,\varphi}(0)$  有一致上界, 即存在  $C_1 \in \mathbb{R}$ , 使得  $f'_{i,\varphi}(0) \leq C_1$  对任意的正整数  $i$  成立。

根据式 (14) 中的第 2 个结论以及  $f_{i,\varphi}(t)(u_i + t\varphi) \in N_2$ , 有

$$\begin{aligned} I(u_i) & \leq I(f_{i,\varphi}(t)(u_i + t\varphi)) + \\ & \frac{1}{i} \|u_i - f_{i,\varphi}(t)(u_i + t\varphi)\|. \end{aligned}$$

代入计算, 因为  $u_i \in N_2$ , 得到

$$\begin{aligned} & \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{1-p} \right) \int_{\Omega} \mathbf{M}(x) \nabla u_i \cdot \nabla u_i + \\ & \lambda \left( \frac{1}{1-p} - \frac{1}{1+q} \right) \int_{\Omega} u_i^{1+q} \leq \\ & \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{1-p} \right) f_{i,\varphi}^2(t) \int_{\Omega} \mathbf{M}(x) \nabla(u_i + t\varphi) \cdot \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \nabla(u_i + t\varphi) + \lambda \left( \frac{1}{1-p} - \frac{1}{1+q} \right) f_{i,\varphi}^{1+q}(t) \cdot \\ & \int_{\Omega} (u_i + t\varphi)^{1+q} + \frac{1}{i} \|(1 - f_{i,\varphi}(t))u_i - t f_{i,\varphi}(t)\varphi\|. \end{aligned}$$

从而有

$$\begin{aligned} & \frac{f_{i,\varphi}(t) - 1}{t} \left\{ \left( -\frac{1}{2} + \frac{1}{1-p} \right) (f_{i,\varphi}(t) + 1) \right. \\ & \int_{\Omega} \mathbf{M}(x) \nabla(u_i + t\varphi) \cdot \nabla(u_i + t\varphi) + \\ & \lambda \left( 1 + \frac{1+q}{p-1} \right) (1+o(1))^q \int_{\Omega} (u_i + t\varphi)^{1+q} \Big\} - \\ & \frac{1}{i} \left| \frac{f_{i,\varphi}(t) - 1}{t} \right| \|u_i\| \leq \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{p-1} \right) \\ & \left\{ 2 \int_{\Omega} \mathbf{M}(x) \nabla u_i \cdot \nabla \varphi + t \int_{\Omega} \mathbf{M}(x) \nabla \varphi \cdot \nabla \varphi \right\} + \\ & \frac{1}{i} f_{i,\varphi}(t) \|\varphi\|. \end{aligned}$$

在上式中令  $t \rightarrow 0^+$ ,

$$\begin{aligned} & f'_{i,\varphi}(0) \left\{ -2 \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{p-1} \right) \int_{\Omega} \mathbf{M}(x) \nabla u_i \cdot \nabla u_i + \right. \\ & \lambda \left( 1 + \frac{1+q}{p-1} \right) \int_{\Omega} u_i^{1+q} - \frac{1}{i} \operatorname{sgn}[f'_{i,\varphi}(0)] \|u_i\| \Big\} \\ & \leq 2 \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{p-1} \right) \int_{\Omega} \mathbf{M}(x) \nabla u_i \cdot \nabla \varphi + \frac{\|\varphi\|}{i}. \end{aligned} \quad (21)$$

由引理 2.6 和  $u_i \in N_2$  可以得到,

$$\begin{aligned} & -2 \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{p-1} \right) \int_{\Omega} \mathbf{M}(x) \nabla u_i \cdot \nabla u_i + \\ & \lambda \left( 1 + \frac{1+q}{p-1} \right) \int_{\Omega} u_i^{1+q} = \\ & - \left( \frac{1-q}{p-1} \int_{\Omega} \mathbf{M}(x) \nabla u_i \cdot \nabla u_i + \frac{p+q}{p-1} \int_{\Omega} f(x) u_i^{1-p} \right) \\ & \leq - \frac{1-q}{p-1} \int_{\Omega} \mathbf{M}(x) \nabla u_i \cdot \nabla u_i \\ & \leq - \frac{1-q}{p-1} \alpha \|u_i\|^2 \leq - \frac{1-q}{p-1} \alpha C_0^2. \end{aligned}$$

由于  $\{u_i\}$  有界, 所以

$$\frac{1}{i} \operatorname{sgn}[f'_{i,\varphi}(0)] \|u_i\| \rightarrow 0 (i \rightarrow \infty).$$

从而可知存在  $N \in \mathbb{N}^*$ , 当  $i > N$  时有

$$\begin{aligned} & -2 \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{p-1} \right) \int_{\Omega} \mathbf{M}(x) \nabla u_i \cdot \nabla u_i + \\ & \lambda \left( 1 + \frac{1+q}{p-1} \right) \int_{\Omega} u_i^{1+q} - \frac{1}{i} \operatorname{sgn}[f'_{i,\varphi}(0)] \|u_i\| \\ & \leq - \frac{(1-q) \alpha C_0^2}{2(p-1)} < 0. \end{aligned} \quad (22)$$

结合式(21)和式(22)以及  $|\int_{\Omega} \mathbf{M}(x) \nabla u_i \cdot \nabla \varphi| \leq C \|\varphi\|$ , 可以得到存在  $C_2 \in \mathbb{R}$  满足

$$C_2 \leq f'_{i,\varphi}(0) \leq C_1, \forall i > N.$$

根据式(14)中的第2个结论以及  $f_{i,\varphi}(t)(u_i + t\varphi) \in N_2$ , 有

$$\begin{aligned} & \frac{1}{p-1} \int_{\Omega} \frac{f(x) u_i^{1-p} - f(x)(u_i + t\varphi)^{1-p}}{t} dx + \\ & \frac{1}{p-1} \frac{(f_{i,\varphi}(t) - 1)(p-1)(1+o(1))^{-p}}{t} \\ & \int_{\Omega} f(x)(u_i + t\varphi)^{1-p} \leq \frac{1}{2} \frac{f_{i,\varphi}(t) - 1}{t} (f_{i,\varphi}(t) + 1) \\ & \int_{\Omega} \mathbf{M}(x) \nabla(u_i + t\varphi) \cdot \nabla(u_i + t\varphi) + \\ & \int_{\Omega} \mathbf{M}(x) \nabla u_i \cdot \nabla \varphi + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \mathbf{M}(x) \nabla \varphi \cdot \nabla \varphi - \\ & \frac{\lambda}{1+q} \frac{f_{i,\varphi}(t) - 1}{t} (1+q)(1+o(1))^q \cdot \\ & \int_{\Omega} (u_i + t\varphi)^{1+q} - \frac{\lambda}{1+q} \int_{\Omega} \frac{(u_i + t\varphi)^{1+q} - u_i^{1+q}}{t} + \\ & \frac{1}{i} \frac{|f_{i,\varphi}(t) - 1|}{t} \|u_i\| + \frac{1}{i} f_{i,\varphi}(t) \|\varphi\|, \end{aligned}$$

其中  $o(1)$  表示当  $t \rightarrow 0^+$  时的无穷小。在上式中令  $t \rightarrow 0^+$  取下极限, 因为  $u_i \in N_2$ , 可知

$$\begin{aligned} & \frac{1}{p-1} \liminf_{t \rightarrow 0^+} \int_{\Omega} \frac{f(x) u_i^{1-p} - f(x)(u_i + t\varphi)^{1-p}}{t} dx \leq \\ & \int_{\Omega} \mathbf{M}(x) \nabla u_i \cdot \nabla \varphi - \lambda \int_{\Omega} u_i^q \varphi + \\ & \frac{|f'_{i,\varphi}(0)| \|u_i\| + \|\varphi\|}{i}. \end{aligned} \quad (23)$$

另一方面, 由 Fatou 引理可以得到

$$\begin{aligned} & (p-1) \int_{\Omega} f(x) u_i^{-p} \varphi \\ & \leq \liminf_{t \rightarrow 0^+} \int_{\Omega} \frac{f(x) u_i^{1-p} - f(x)(u_i + t\varphi)^{1-p}}{t} dx. \end{aligned} \quad (24)$$

由式(17)用 Fatou 引理, 并结合式(23)和式(24), 可得

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} f(x)(u^*)^{-p} \varphi \leq \liminf_{i \rightarrow \infty} \left\{ \int_{\Omega} \mathbf{M}(x) \nabla u_i \cdot \nabla \varphi - \right. \\ & \left. \lambda \int_{\Omega} u_i^q \varphi + \frac{|f'_{i,\varphi}(0)| \|u_i\| + \|\varphi\|}{i} \right\}. \end{aligned} \quad (25)$$

根据已知的一些结论,  $f'_{i,\varphi}(0)$  和  $u_i$  的有界性, 引理 2.7 和式(15), 并再次运用式(17)和 Fatou 引理, 由式(25)可知

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} f(x)(u^*)^{-p} \varphi \leq \int_{\Omega} \mathbf{M}(x) \nabla u^* \cdot \nabla \varphi - \\ & \lambda \int_{\Omega} (u^*)^q \varphi. \end{aligned} \quad (26)$$

注意式(26)是对任意的  $\varphi \in H_0^1(\Omega)$  且  $\varphi \geq 0$  成立的, 所以有

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \mathbf{M}(x) \nabla u^* \cdot \nabla u^* - \int_{\Omega} f(x)(u^*)^{1-p} - \\ & \lambda \int_{\Omega} (u^*)^{1+q} \geq 0, \end{aligned} \quad (27)$$

从而  $\int_{\Omega} f(x)(u^*)^{1-p} dx < +\infty$ , 故  $u^* > 0$  a.e. in  $\Omega$ . 所以  $u^* \in N_1$ .

由式(14)中第1个结论和式(16)可得

$$\begin{aligned} & \inf_{N_1} I = \lim_{i \rightarrow \infty} I(u_i) = \lim_{i \rightarrow \infty} \inf I(u_i) \geq \\ & \liminf_{i \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \int_{\Omega} \mathbf{M}(x) \nabla u_i \cdot \nabla u_i + \\ & \liminf_{i \rightarrow \infty} \frac{1}{p-1} \int_{\Omega} f(x) u_i^{1-p} - \frac{\lambda}{1+q} \int_{\Omega} (u^*)^{1+q} \\ & \geq \frac{1}{2} \int_{\Omega} \mathbf{M}(x) \nabla u^* \cdot \nabla u^* + \\ & \frac{1}{p-1} \int_{\Omega} f(x)(u^*)^{1-p} - \\ & \frac{\lambda}{1+q} \int_{\Omega} (u^*)^{1+q} = I(u^*) \\ & \geq I(t(u^*)u^*) \geq \inf_{N_2} I = \inf_{N_1} I. \end{aligned} \quad (28)$$

式(28)中还用到了引理 2.4 和下面两个结论。

1) 由式(15)和引理 2.2 可知

$$u_i \rightharpoonup u^* \text{ in } (H_0^1(\Omega), \|\cdot\|_1);$$

2) 由式(17)和 Fatou 引理可知

$$\int_{\Omega} f(x)(u^*)^{1-p} \leq \liminf_{i \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f(x) u_i^{1-p}.$$

由式(28)可以得到  $I(u^*) = I(t(u^*)u^*)$ , 根据引理 2.4 中的最小值的性质可知  $t(u^*) = 1$ , 从而  $u^* \in N_2$ .

**情况 2** 对充分大的  $i$  有  $u_i \in N_1 \setminus N_2$ .

固定  $\varphi \in H_0^1(\Omega)$  满足  $\varphi \geq 0$ . 仍然可以定义  $g(t), h(t), k(t)$  (如同情况 1 中一样), 它们依然是连续的。式(24)仍然成立。由控制收敛定理还是可以得到当  $t \rightarrow 0^+$  时,

$$\int_{\Omega} \frac{(u_i + t\varphi)^{1+q} - u_i^{1+q}}{t} dx \rightarrow (1+q) \int_{\Omega} u_i^q \varphi dx.$$

因为  $u_i \in N_1 \setminus N_2$ , 所以

$$\int_{\Omega} \mathbf{M}(x) \nabla u_i \cdot \nabla u_i - \int_{\Omega} f(x) u_i^{1-p} -$$

$$\lambda \int_{\Omega} u_i^{1+q} > 0.$$

由  $g(t), h(t), k(t)$  的连续性可知, 当  $t$  充分小时成立

$$\int_{\Omega} \mathbf{M}(x) \nabla(u_i + t\varphi) \cdot \nabla(u_i + t\varphi) - \int_{\Omega} f(x) (u_i + t\varphi)^{1-p} - \lambda \int_{\Omega} (u_i + t\varphi)^{1+q} > 0,$$

即得  $u_i + t\varphi \in N_1 \setminus N_2$ .

因为  $I(w) \geq I(u_i) - \frac{1}{i} \|w - u_i\|, \forall w \in N_1$ , 所以

$$I(u_i) \leq I(u_i + t\varphi) + \frac{1}{i} \|u_i - (u_i + t\varphi)\|.$$

代入计算, 两边同除以  $t$  得

$$0 \leq \int_{\Omega} \mathbf{M}(x) \nabla u_i \cdot \nabla \varphi + \frac{1}{2} t \int_{\Omega} \mathbf{M}(x) \nabla \varphi \cdot \nabla \varphi + \frac{1}{p-1} \int_{\Omega} \frac{f(x) (u_i + t\varphi)^{1-p} - f(x) u_i^{1-p}}{t} - \frac{\lambda}{1+q} \int_{\Omega} \frac{(u_i + t\varphi)^{1+q} - u_i^{1+q}}{t} + \frac{\|\varphi\|}{i}.$$

令  $t \rightarrow 0^+$  取上极限 (通过引理 2.7 和式 (15)), 得到

$$0 \leq \int_{\Omega} \mathbf{M}(x) \nabla u_i \cdot \nabla \varphi - \int_{\Omega} f(x) u_i^{-p} \varphi - \lambda \int_{\Omega} u_i^q \varphi + \frac{\|\varphi\|}{i}. \quad (29)$$

另外由  $u_i(x) \rightarrow u^*(x)$  a.e.in  $\Omega$ , 利用 Fatou 引理可得

$$\int_{\Omega} f(x) (u^*)^{-p} \varphi \leq \liminf_{i \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f(x) u_i^{-p} \varphi, \quad (30)$$

$$\int_{\Omega} (u^*)^q \varphi \leq \liminf_{i \rightarrow \infty} \int_{\Omega} u_i^q \varphi. \quad (31)$$

结合式 (29), 式 (30) 和式 (31) 可知

$$\int_{\Omega} f(x) (u^*)^{-p} \varphi \leq \int_{\Omega} \mathbf{M}(x) \nabla u^* \cdot \nabla \varphi - \lambda \int_{\Omega} (u^*)^q \varphi,$$

所以

$$\int_{\Omega} \mathbf{M}(x) \nabla u^* \cdot \nabla u^* - \int_{\Omega} f(x) (u^*)^{1-p} - \lambda \int_{\Omega} (u^*)^{1+q} \geq 0.$$

从而  $\int_{\Omega} f(x) (u^*)^{1-p} dx < +\infty$ , 故  $u^* > 0$  a.e.in  $\Omega$ , 所以  $u^* \in N_1$ . 重复情况 1 中的步骤, 此时也成立

$$\inf_{N_1} I \geq I(u^*) \geq I(t(u^*)u^*) \geq \inf_{N_2} I = \inf_{N_1} I,$$

所以  $u^* \in N_2$ .

无论是情况 1 还是情况 2 都得到这样的结果,

$$\begin{cases} u^* \in N_2, u^* > 0, \\ I(u^*) = \inf_{N_1} I, \\ \int_{\Omega} \mathbf{M}(x) \nabla u^* \cdot \nabla \varphi - \int_{\Omega} f(x) (u^*)^{-p} \varphi - \lambda \int_{\Omega} (u^*)^q \varphi \geq 0, \forall \varphi \geq 0. \end{cases} \quad (32)$$

下面证明  $u^*$  是方程 (1) 的解. 固定  $\psi \in H_0^1(\Omega)$  和  $t > 0$ ,  $(u^* + t\psi)^+ \in H_0^1(\Omega)$  且  $(u^* + t\psi)^+ \geq 0$ . 由式 (32) 可知

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_{\Omega} \mathbf{M}(x) \nabla u^* \cdot \nabla (u^* + t\psi)^+ - \int_{\Omega} f(x) (u^*)^{-p} (u^* + t\psi)^+ - \lambda \int_{\Omega} (u^*)^q (u^* + t\psi)^+ \\ &= \int_{\Omega} \mathbf{M}(x) \nabla u^* \cdot \nabla (u^* + t\psi) - \int_{\Omega} f(x) (u^*)^{-p} (u^* + t\psi) - \lambda \int_{\Omega} (u^*)^q (u^* + t\psi) - \int_{\{u^* + t\psi < 0\}} \mathbf{M}(x) \nabla u^* \cdot \nabla (u^* + t\psi) + \int_{\{u^* + t\psi < 0\}} f(x) (u^*)^{-p} (u^* + t\psi) + \lambda \int_{\{u^* + t\psi < 0\}} (u^*)^q (u^* + t\psi) \\ &\leq t \left\{ \int_{\Omega} \mathbf{M}(x) \nabla u^* \cdot \nabla \psi - \int_{\Omega} f(x) (u^*)^{-p} \psi - \lambda \int_{\Omega} (u^*)^q \psi \right\} - t \int_{\{u^* + t\psi < 0\}} \mathbf{M}(x) \nabla u^* \cdot \nabla \psi. \end{aligned}$$

两边除以  $t$ , 令  $t \rightarrow 0^+$ , 其中  $\text{meas}\{u^* + t\psi < 0\} \rightarrow 0$ , 可知

$$\int_{\Omega} \mathbf{M}(x) \nabla u^* \cdot \nabla \psi - \int_{\Omega} f(x) (u^*)^{-p} \psi - \lambda \int_{\Omega} (u^*)^q \psi \geq 0. \quad (33)$$

从而

$$\int_{\Omega} \mathbf{M}(x) \nabla u^* \cdot \nabla \psi - \int_{\Omega} f(x) (u^*)^{-p} \psi - \lambda \int_{\Omega} (u^*)^q \psi = 0, \forall \psi \in H_0^1(\Omega), \quad (34)$$

即说明  $u^*$  是方程 (1) 的弱解.  $\square$



定理 1.2 是运用定理 1.1 的结论的一个例子。

**定理 1.2 的证明** 设  $\varphi_1$  是  $-\Delta$  在 Dirichlet 边界条件下的第一特征向量, 即

$$\begin{cases} -\Delta\varphi_1 = \lambda_1\varphi_1 \text{ in } \Omega, \\ \varphi_1 = 0 \text{ on } \partial\Omega, \end{cases}$$

而且在  $\Omega$  内  $\varphi_1 > 0$ , 其中  $\lambda_1$  表示  $-\Delta$  在 Dirichlet 边界条件下的第一特征值。

根据 Lazer 和 McKenna (文献 [1], Lemma, Theorem 1 和 2) 可知,  $\int_{\Omega} \varphi_1^l(x) dx < +\infty \Leftrightarrow l > -1$ , 且对任意的  $-3 < -p < -1$ , 存在相应函数  $u_p \in H_0^1(\Omega) \cap C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ , 在  $\Omega$  内  $u_p > 0$ , 存在常数  $d_0, d_1 > 0$ , 使得

$$d_0\varphi_1^{\frac{2}{1+p}}(x) \leq u_p(x) \leq d_1\varphi_1^{\frac{2}{1+p}}(x), \forall x \in \Omega.$$

令  $u_0 = u_p$ , 下面验证  $\int_{\Omega} |x|^{-\mu} u_0^{1-p} dx < +\infty$ 。

因为  $0 \in \Omega$ , 所以可取一个小球  $B_r(0) \subset \Omega$ , 从而存在  $C_1, C_2 > 0$ , 使得  $0 < C_1 \leq u_0(x) \leq C_2$ ,  $\forall x \in B_r(0)$ 。

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |x|^{-\mu} u_0^{1-p} dx &= \int_{B_r} |x|^{-\mu} u_0^{1-p} dx + \\ &\int_{\Omega \setminus B_r} |x|^{-\mu} u_0^{1-p} dx \leq C_1^{1-p} \int_{B_r} |x|^{-\mu} dx + \\ &r^{-\mu} \int_{\Omega \setminus B_r} u_0^{1-p} dx \leq C_1^{1-p} \int_{B_r} |x|^{-\mu} dx + \\ &r^{-\mu} d_0^{1-p} \int_{\Omega \setminus B_r} \varphi_1^{\frac{2(1-p)}{1+p}}(x) dx \leq C_1^{1-p} \int_{B_r} |x|^{-\mu} dx + \\ &r^{-\mu} d_0^{1-p} \int_{\Omega} \varphi_1^{\frac{2(1-p)}{1+p}}(x) dx < +\infty, \end{aligned} \tag{35}$$

其中用到, 因为  $-n < -\mu < 0$ , 所以  $\int_{B_r} |x|^{-\mu} dx < +\infty$ , 由于  $1 < p < 3$ , 所以  $\frac{2(1-p)}{1+p} > -1$ , 故

$$\int_{\Omega} \varphi_1^{\frac{2(1-p)}{1+p}}(x) dx < +\infty.$$

根据定理 1.1 即得要证结论。 □

### 参考文献

[1] Lazer A C, McKenna P J. On a singular nonlinear elliptic boundaryvalue problem [J]. Proceeding of the American Mathematical Socirty, 1991, 111(3): 721-730.

[2] Boccardo L, Orsina L. Semilinear elliptic equations with singular nonlinearities[J]. Calculus of Variations and Partial Differential Equations, 2010, 37(3): 363-380.

[3] Arcoya D, Boccardo L. Multiplicity of solutions for a Dirichlet problem with a singular and a supercritical nonlinearities[J]. Differential and Integral Equations, 2013, 26 (26): 7 121-7 128.

[4] Arcoya D, Boccardo L, Leonori T, et al. Some elliptic problems with singular natural growth lower order terms[J]. Journal of Differential Equations, 2010, 249 (11): 2 771-2 795.

[5] Boccardo L. Dirichlet problems with singular and gradient quadratic lower order terms[J]. Esaim Control Optimisation & Calculus of Variations, 2008, 14(3): 411-426.

[6] Boccardo L. A Dirichlet problem with singular and supercritical nonlinearities [J]. Nonlinear Analysis Theory Methods & Application, 2012, 75(12): 4 436-4 440.

[7] Boccardo L, Orsina L. A variational semilinear singular system [J]. Nonlinear Analysis Theory Methods & Applications, 2011, 74 (12): 3 849-3 860.

[8] Sun Y J. Compatible phenomena in singular problems[J]. Proceedings of the Royal Society of Edinburgh, 2013, 143 (A): 1 321-1 330.

[9] Sun Y J, Wu S P. An exact estimate result for a class of singular equations with critical exponents [J]. Journal of Functional Analysis, 2011, 260(5): 1 257-1 284.

[10] Sun Y J, Wu S P, Long Y M. Combined effects of singular and superlinear nonlinearities in some singular boundary value problems [J]. Journal of Differential Equations, 2001, 176 (2): 511-531.

[11] Sun Y J, Zhang D Z. The role of the power 3 for elliptic equations with negative exponents[J]. Calculus of Variations & Partial Differential Equations, 2014, 49(3/4): 909-922.

[12] Adams A R. Sobolev spaces [M]. New York: Academic Press, 1975: 95-107.