第 36 卷第 4 期 中国科学院大学学报 Vol. 36 No. 4
2019 年 7 月 Journal of University of Chinese Academy of Sciences July 2019

文章编号:2095-6134(2019)04-0444-05

几类有限交换群的整群环的 K_1 群*

王祚恩†,唐国平

(中国科学院大学数学科学学院, 北京 100049)

(2018 年 1 月 29 日收稿; 2018 年 4 月 27 日收修改稿)

Wang Z E, Tang G P. K_1 groups of integral group rings for some types of finite abelian groups[J]. Journal of University of Chinese Academy of Sciences, 2019,36(4):444-448.

摘 要 令 G 为一个有限交换群,它的整群环 $\mathbf{Z}G$ 为 $\mathbf{Q}G$ 中的一个 $\mathbf{Z}$-序。令 Γ 为 $\mathbf{Q}G$ 中包含 $\mathbf{Z}G$ 的极大 $\mathbf{Z}$-序,对几类有限交换群 G,计算 $K_1(\mathbf{Z}G)$ 在 $K_1(\Gamma)$ 中的指数。

关键词 整群环;$\mathbf{Z}$-序;核群 $D(\mathbf{Z}G)$;K_1 群 $K_1(\mathbf{Z}G)$;Whitehead 群 $Wh(G)$

中图分类号:O154.3 **文献标志码**:A **doi**:10.7523/j.issn.2095-6134.2019.04.002

K_1 groups of integral group rings for some types of finite abelian groups

WANG Zuoen, TANG Guoping

(*School of Mathematical Sciences, University of Chinese Academy of Sciences Beijing* 100049, *China*)

Abstract Let G be a finite abelian group. Its integral group ring $\mathbf{Z}G$ is a $\mathbf{Z}$-order in $\mathbf{Q}G$. Let Γ be the maximal $\mathbf{Z}$-order in $\mathbf{Q}G$ containing $\mathbf{Z}G$. We calculate the index of $K_1(\mathbf{Z}G)$ in $K_1(\Gamma)$ for some types of finite abelian groups.

Keywords integral group ring; $\mathbf{Z}$-order; kernel group $D(\mathbf{Z}G)$; K_1 group $K_1(\mathbf{Z}G)$; Whitehead group $Wh(G)$

本文报道我们在利用核群 $D(\mathbf{Z}G)$ 研究 $K_1(\mathbf{Z}G)$ 时得到的一些结果。

1 预备知识

定义 1.1 设 R 是一个有单位元 1 的环,有限生成投射 R - 模 M 的同构类记为 $[M]$, 则在集合 $\mathrm{Proj}(R)=\{[M] \mid M$ 是有限生成投射 R - 模$\}$ 上定义加法运算 $[M]+[N]=[M \oplus N]$, 使得 $\mathrm{Proj}(R)$ 成为一个有零元 0 的交换半群, $K_0(R)$ 定义为 $\mathrm{Proj}(R)$ 的群完备化。

设 $f:R \to S$ 是一个环同态,则 S 可以看成 S - R 双模,故对左 R - 模 M, 有 $S \otimes_R M$ 是左 S - 模, 当 M 是有限生成投射 R - 模时, $S \otimes_R M$ 是有限生成投射 S - 模。

由此可建立群同态 $K_0(f):K_0(R) \to K_0(S)$, $[M] \to [S \otimes_R M]$。

定义 1.2 设 R 是一个诺特整环,商域为 K, A 是一个有限维 K - 代数。A 的一个 R - 序(R-order)Λ 是 A 的一个子环,同时是 A 的有限生成 R - 子模,并满足 $K \cdot \Lambda = \left\{ \sum \alpha_i m_i : \alpha_i \in K, m_i \in \Lambda, \text{其中} \sum \text{表示有限和} \right\} = A$。

* 国家自然科学基金(11771422)资助

† 通信作者, E-mail: wangzuoen15@mails.ucas.edu.cn

设 G 为有限群,易见 $\mathbf{Z}G$ 为 $\mathbf{Q}G$ 中的一个 $\mathbf{Z}$-序($\mathbf{Z}$-order)。

现考虑 $\mathbf{Q}G$ 中的任意一个 $\mathbf{Z}$-序 Λ,设 p 为任意的素数,则整数环 $\mathbf{Z}$ 有素理想 (p),令 $\Lambda_{(p)}$ 表示 Λ 在素理想 (p) 处的局部化,则有:$K_0(\Lambda)\to K_0(\Lambda_{(p)}),[M]\to[\Lambda_{(p)}\otimes_\Lambda M]$。

局部自由类群 $CL(\Lambda)$ 定义为 $K_0(\Lambda)\to\prod\limits_{p}K_0(\Lambda_{(p)})$ 的核,其中 p 走遍 $\mathbf{Z}$ 中所有素数。

定义 1.3　设 Λ 是半单代数 $\mathbf{Q}G$ 的一个 $\mathbf{Z}$-序,Γ 是 $\mathbf{Q}G$ 中包含 Λ 的一个极大 $\mathbf{Z}$-序,则有同态 $\eta:CL(\Lambda)\to CL(\Gamma)$,将 $[M]$ 映射为 $[\Gamma\otimes_\Lambda M]$,其中 M 是一个有限生成投射 Λ-模,核群 $D(\Lambda)$ 定义为映射 η 的核。

注:$\mathbf{Q}G$ 中包含 Λ 的极大 $\mathbf{Z}$-序一般不唯一,但核群 $D(\Lambda)$ 与极大 $\mathbf{Z}$-序 Γ 的选取无关(见文献[1])。

定义 1.4　设 R 是一个有单位元 1 的环,记 $GL(R)=\cup_{n=1}^{\infty}GL_n(R),E(R)=\cup_{n=1}^{\infty}E_n(R)$。

由 Whitehead 引理可知,$E(R)=[GL(R),GL(R)]=[E(R),E(R)]$,因此 $E(R)\lhd GL(R)$ 且 $E(R)$ 为完全群。记 $K_1(R)=GL(R)/E(R)$,称交换群 $K_1(R)$ 为环 R 的 K_1 群。

对于任意群 G,$\{\pm g:g\in G\}\subseteq(\mathbf{Z}G)^\times\subseteq GL(\mathbf{Z}G)$,将$\{\pm g:g\in G\}$ 对应于 $K_1(\mathbf{Z}G)$ 的元素生成的子群记为 $\pm G$,则称 $Wh(G)=K_1(\mathbf{Z}G)/\pm G$ 为 G 的 Whitehead 群。关于 Whitehead 群的更多信息见文献[2]。

设 R 是一个有单位元 1 的交换环,用 $R^\times$ 表示环 R 的单位群,则行列式映射诱导出 $K_1(R)$ 到 $R^\times$ 的满同态,并且有分裂同态 $R^\times\to K_1(R)$,因此有 $K_1(R)=R^\times\oplus SK_1(R)$。其中 $SK_1(R)=SL(R)/E(R)$,$SL(R)$ 是 $GL(R)$ 中行列式为 1 的矩阵构成的群。

注 1:若 F 是代数数域,R 是 F 的代数整数环,则由文献[3]可知 $SK_1(R)=0$。

注 2:对于整群环 $\mathbf{Z}G$,文献[2]给出了 $SK_1(\mathbf{Z}G)=0$ 的充分必要条件。

引理 1.1　当 G 是有限交换群时,$\mathbf{Z}G$ 是半单代数 $\mathbf{Q}G$ 的一个 $\mathbf{Z}$-序,且 $\mathbf{Q}G$ 只有一个极大 $\mathbf{Z}$-序 Γ,$\Gamma\supseteq\mathbf{Z}G$。如果 $\mathbf{Q}G\cong\prod\limits_{i=1}^{r}\mathbf{Q}(\xi_{l_i})$,则 $\Gamma=\prod\limits_{i=1}^{r}\mathbf{Z}[\xi_{l_i}]$。

证明　见文献[4]。

引理 1.2　在引理 1.1 的假设下,$(\mathbf{Z}G)^\times$ 的挠部分即为$\{\pm g:g\in G\}$,且$(\mathbf{Z}G)^\times$ 自由部分的秩等于 $\Gamma^\times$ 自由部分的秩。特别地,$[\Gamma^\times:(\mathbf{Z}G)^\times]<+\infty$。

证明　见文献[5]。

定义 1.5　在引理 1.1 的假设下,令 $\mathbf{Z}G_p=\mathbf{Z}G\otimes_{\mathbf{Z}}\mathbf{Z}_p,\Gamma_p=\Gamma\otimes_{\mathbf{Z}}\mathbf{Z}_p$,其中 $\mathbf{Z}_p$ 为 p-adic 整数环。$\mathbf{Z}$ 中的素理想 (p) 称为 $\mathbf{Z}G$-奇异,如果 $\Gamma_p\neq\mathbf{Z}G_p$。记 $S(\mathbf{Z}G)$ 为 $\mathbf{Z}G$-奇异素理想的集合。

引理 1.3　在引理 1.1 的假设下,记号如前,则有正合列:$1\to\Gamma^\times/(\mathbf{Z}G)^\times\to\prod\limits_{S(\mathbf{Z}G)}(\Gamma_p)^\times/(\mathbf{Z}G_p)^\times\to CL(\mathbf{Z}G)\to CL(\Gamma)\to 1$

且有:

(i) $|D(\mathbf{Z}G)|\cdot[\Gamma^\times:(\mathbf{Z}G)^\times]=\prod\limits_{S(\mathbf{Z}G)}[(\Gamma_p)^\times:(\mathbf{Z}G_p)^\times]$

(ii) $[(\Gamma_p)^\times:(\mathbf{Z}G_p)^\times]=l_pm_p$,

$$l_p=\frac{|(\Gamma_p/J_p)^\times|}{|(\mathbf{Z}G_p/J_p\cap\mathbf{Z}G_p)^\times|},$$

$$m_p=\frac{[\Gamma_p:\mathbf{Z}G_p]\cdot[\mathbf{Z}G_p:J_p\cap\mathbf{Z}G_p]}{[\Gamma_p:J_p]},$$

其中 J_p 为 Γ_p 的 Jacobson 根。

证明　见文献[6]。

引理 1.4　在引理 1.1 的假设下,记号如前,则 Γ_p 为 $\mathbf{Q}G\otimes_{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}_p$ 中的极大 $\mathbf{Z}_p$-序。且如果 $\mathbf{Q}G\otimes_{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}_p\cong\prod\limits_{i=1}^{r}A_i$(单分支),令 R_i 为 $\mathbf{Z}_p$ 在 A_i 中的整闭包。则有 $\Gamma_p=\prod\limits_{i=1}^{r}\Gamma_i$,其中 Γ_i 为 A_i 中的极大 R_i-序。

证明　见文献[4]。

由文献[2]可知,对于一些有限交换群 G,$SK_1(\mathbf{Z}G)=0$,此时 $K_1(\mathbf{Z}G)=(\mathbf{Z}G)^\times$。又由引理 1.2,此时 G 的 Whitehead 群 $Wh(G)$ 即为有限生成交换群 $K_1(\mathbf{Z}G)$ 的自由部分,且其秩与有限生成交换群 $K_1(\Gamma)=\Gamma^\times$ 自由部分的秩相等。由于此时 $K_1(\Gamma)$ 与 $K_1(\mathbf{Z}G)$ 的挠部分均显然,根据有限生成交换群的结构定理,计算出 $[K_1(\Gamma):K_1(\mathbf{Z}G)]$ 就可以估计 $K_1(\Gamma)$ 自由部分的生成元与 $K_1(\mathbf{Z}G)$ 自由部分的生成元之间的倍数关系,本文的第 2 节和第 3 节主要对此进行计算。

2　$G=C_p^l\times C_q^m$ 时的情形

定理 2.1　设 $G=C_p^l\times C_q^m$(p 与 q 为不同的素数,C_p^l 表示 l 个 p 阶循环群的乘积),则 $|D(\mathbf{Z}G)|\cdot[\Gamma^\times:(\mathbf{Z}G)^\times]=l_p\cdot m_p\cdot l_q\cdot m_q$,

$$l_p=(p-1)^{p^{l-1}+p^{l-2}+\cdots+p+1}\times (p^f-1)^{g(p^{l-1}+p^{l-2}+\cdots+p+1)(q^{m-1}+q^{m-2}+\cdots+q+1)},$$
$$l_q=(q-1)^{q^{m-1}+q^{m-2}+\cdots+q+1}\times (q^{f'}-1)^{g'(p^{l-1}+p^{l-2}+\cdots+p+1)(q^{m-1}+q^{m-2}+\cdots+q+1)},$$
$$m_p=p^{q^m\cdot\frac{1}{2}(p^l-p^{l-1}+p^l-p^{l-2}+\cdots+p^l-p)},$$
$$m_q=q^{p^l\cdot\frac{1}{2}(q^m-q^{m-1}+q^m-q^{m-2}+\cdots+q^m-q)}.$$

其中f是使$p^f\equiv 1(\bmod q)$成立的最小正整数,$g=\dfrac{q-1}{f}$。f'是使$q^{f'}\equiv 1(\bmod p)$成立的最小正整数,$g'=\dfrac{p-1}{f'}$。

证明

1)由 $G=C_p^l\times C_q^m$,可得 $\mathbf{Q}G=\mathbf{Q}C_p\otimes_{\mathbf{Q}}\cdots\otimes_{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}C_p\otimes_{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}C_q\otimes_{\mathbf{Q}}\cdots\otimes_{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}C_q$。

又 $\mathbf{Q}C_p=\mathbf{Q}\times\mathbf{Q}(\omega),\omega=e^{\frac{2\pi i}{p}},\mathbf{Q}C_q=\mathbf{Q}\times\mathbf{Q}(\eta),\eta=e^{\frac{2\pi i}{q}},\mathbf{Q}(\omega)\otimes_{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}(\omega)=\mathbf{Q}(\omega)[x]/(x^{p-1}+\cdots+x+1)=\mathbf{Q}(\omega)^{p-1},\mathbf{Q}(\eta)\otimes_{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}(\eta)=\mathbf{Q}(\eta)^{q-1},\mathbf{Q}(\omega)\otimes_{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}(\eta)=\mathbf{Q}(\omega)[x]/(x^{q-1}+\cdots+x+1)=\mathbf{Q}(\omega)\mathbf{Q}(\eta)=\mathbf{Q}(\lambda),\lambda=e^{\frac{2\pi i}{pq}}$。

归纳可得

$$\mathbf{Q}G=\mathbf{Q}\times\mathbf{Q}(\omega)^{p^{l-1}+p^{l-2}+\cdots+p+1}\times \mathbf{Q}(\eta)^{q^{m-1}+q^{m-2}+\cdots+q+1}\times \mathbf{Q}(\lambda)^{(p^{l-1}+p^{l-2}+\cdots+p+1)(q^{m-1}+q^{m-2}+\cdots+q+1)}.$$

2)由引理 1.1,

$$\Gamma=\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}[\omega]^{p^{l-1}+p^{l-2}+\cdots+p+1}\times \mathbf{Z}[\eta]^{q^{m-1}+q^{m-2}+\cdots+q+1}\times \mathbf{Z}[\lambda]^{(p^{l-1}+p^{l-2}+\cdots+p+1)(q^{m-1}+q^{m-2}+\cdots+q+1)}.$$

由 $p\mathbf{Z}[\omega]=(1-\omega)^{p-1},N(1-\omega)=p$。

可得 $\mathbf{Q}(\omega)\otimes_{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}_p=\mathbf{Q}(\omega)_{(1-\omega)}$,即 $\mathbf{Q}(\omega)$ 对 $\mathbf{Z}[\omega]$ 中素理想 $(1-\omega)$ 的局部域。

记 $O_{(1-\omega)}$ 为其赋值环,$M_{(1-\omega)}$ 为 $O_{(1-\omega)}$ 唯一的极大理想。易见 $O_{(1-\omega)}$ 为 $\mathbf{Z}_p$ 在 $Q(\omega)_{(1-\omega)}$ 中的整闭包。

再记 O' 为 $\mathbf{Q}(\omega)$ 的赋值环,M' 为 O' 唯一的极大理想。

由局部域的性质可得 $O_{(1-\omega)}/M_{(1-\omega)}=O'/M'=\mathbf{Z}[\omega]/(1-\omega)=F_p$,即 p 阶有限域。

由 $p\mathbf{Z}[\eta]=P_1\cdots P_g,g=\dfrac{q-1}{f}$,其中$f$是使$p^f\equiv 1(\bmod q)$成立的最小正整数。

可得 $\mathbf{Q}(\eta)\otimes_{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}_p=\mathbf{Q}(\eta)_{P_1}\times\cdots\times\mathbf{Q}(\eta)_{P_g}$,记号同上,有 $O_{P_j}/M_{P_j}=\mathbf{Z}[\eta]/P_j=F_{p^f}$。

由 $p\mathbf{Z}[\lambda]=(P'_1\cdots P'_g)^{p-1}$,可得 $\mathbf{Q}(\lambda)\otimes_{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}_p=\mathbf{Q}(\lambda)_{P'_1}\times\cdots\times\mathbf{Q}(\lambda)_{P'_g}$,类似地,我们有 $O_{P'_j}/M_{P'_j}=F_{p^f}$。

因此 $\mathbf{Q}G\otimes_{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}_p=\mathbf{Q}_p\times(\mathbf{Q}(\omega)_{(1-\omega)})^{p^{l-1}+\cdots+p+1}\times(\mathbf{Q}(\eta)_{P_1}\times\cdots\times\mathbf{Q}(\eta)_{P_g})^{q^{m-1}+q^{m-2}+\cdots+q+1}\times(\mathbf{Q}(\lambda)_{P'_1}\times\cdots\times\mathbf{Q}(\lambda)_{P'_g})^{(p^{l-1}+\cdots+p+1)(q^{m-1}+\cdots+q+1)}$。

由引理 1.4 可知,$\Gamma_p/J_p=F_p\times F_p^{p^{l-1}+p^{l-2}+\cdots+p+1}\times F_{p^f}^{g(q^{m-1}+q^{m-2}+\cdots+q+1)}\times F_{p^f}^{g(p^{l-1}+p^{l-2}+\cdots+p+1)(q^{m-1}+q^{m-2}+\cdots+q+1)}$。

同理可得,$\Gamma_q/J_q=F_q\times F_q^{q^{m-1}+q^{m-2}+\cdots+q+1}\times F_{q^{f'}}^{g'(p^{l-1}+p^{l-2}+\cdots+p+1)}\times F_{q^{f'}}^{g'(p^{l-1}+p^{l-2}+\cdots+p+1)(q^{m-1}+q^{m-2}+\cdots+q+1)}$,

其中f'是使$q^{f'}\equiv 1(\bmod p)$成立的最小正整数,$g'=\dfrac{p-1}{f'}$。

3)$\mathbf{Z}G_p/J_p\cap\mathbf{Z}G_p=F_p[C_q\times\cdots\times C_q]=F_p[C_q]\otimes_{F_p}\cdots\otimes_{F_p}F_p[C_q]$。

$F_p[C_q]=F_p[x]/(x-1)\times F_p[x]/(x^{q-1}+x^{q-2}+\cdots+x+1)$,又在 $F_p[x]$ 中有 $x^{q-1}+x^{q-2}+\cdots+x+1=\prod_{j=1}^{g}\varphi_j(x)$,

其中的 $\varphi_j(x)$ 都是 $F_p[x]$ 中的f次不可约多项式(见文献[7])。因此得到 $F_p[C_q]=F_p\times F_{p^f}^g$。

由于有限域的有限扩张为 Galois 扩张,设 $F_{p^f}=F_p(\theta)$,φ 为 θ 在 F_p 上的极小多项式,则 φ 在 F_{p^f} 上分裂。

所以 $F_{p^f}\otimes_{F_p}F_{p^f}=F_{p^f}[x]/(\varphi)=F_{p^f}^f$。

归纳可得 $\mathbf{Z}G_p/J_p\cap\mathbf{Z}G_p=F_p\times F_{p^f}^{(q^{m-1}+q^{m-2}+\cdots+q+1)g}$,同理可得 $\mathbf{Z}G_q/J_q\cap\mathbf{Z}G_q=F_q\times F_{q^{f'}}^{(p^{l-1}+p^{l-2}+\cdots+p+1)g'}$。

4)记 $d(\Gamma)$ 为 Γ 的判别式,因此 $d(\Gamma)=p^{(p-2)(p^{l-1}+p^{l-2}+\cdots+p+1)}\cdot q^{(q-2)(q^{m-1}+q^{m-2}+\cdots+q+1)}\cdot(p^{(p-2)(q-1)}\cdot q^{(q-2)(p-1)})^{(p^{l-1}+\cdots+p+1)(q^{m-1}+\cdots+q+1)}=p^{q^m(p^l-1-p^{l-1}-p^{l-2}-\cdots-p-1)}\cdot q^{p^l(q^m-1-q^{m-1}-q^{m-2}-\cdots-q-1)}$,记 $d(\mathbf{Z}G)$ 为 $\mathbf{Z}G$ 的判别式,$d(\mathbf{Z}G)=(p^lq^m)^{p^lq^m}$。

由文献[4]可知 $[\Gamma:\mathbf{Z}G]^2=d(\mathbf{Z}G)/d(\Gamma)$,所以 $[\Gamma:\mathbf{Z}G]=p^{q^m\cdot\frac{1}{2}(p^l+p^{l-1}+p^l+p^{l-2}+\cdots+p^l+p+2)}\cdot q^{p^l\cdot\frac{1}{2}(q^m+q^{m-1}+q^m+q^{m-2}+\cdots+q^m+q+2)}$,因此可得$[\Gamma_p:\mathbf{Z}G_p]=p^{q^m\cdot\frac{1}{2}(p^l+p^{l-1}+p^l+p^{l-2}+\cdots+p^l+p+2)}$,$[\Gamma_q:\mathbf{Z}G_q]=q^{p^l\cdot\frac{1}{2}(q^m+q^{m-1}+q^m+q^{m-2}+\cdots+q^m+q+2)}$。

5)由引理 1.3,

$l_p=(p-1)^{p^{l-1}+p^{l-2}+\cdots+p+1}\times$
$(p^f-1)^{g(p^{l-1}+p^{l-2}+\cdots+p+1)(q^{m-1}+q^{m-2}+\cdots+q+1)}$,
$l_q=(q-1)^{q^{m-1}+q^{m-2}+\cdots+q+1}\times$
$(q^{f'}-1)^{g'(p^{l-1}+p^{l-2}+\cdots+p+1)(q^{m-1}+q^{m-2}+\cdots+q+1)}$,

$$m_p=\frac{p^{q^m\cdot\frac{1}{2}(p^l+p^{l-1}+p^l+p^{l-2}+\cdots+p^l+p+2)}\times p\times p^{(q^m-1)}}{p\times p^{(p^{l-1}+\cdots+p+1)}\times p^{(q^m-1)}\times p^{(q^m-1)(p^{l-1}+\cdots+p+1)}}=p^{q^m\cdot\frac{1}{2}(p^l-p^{l-1}+p^l-p^{l-2}+\cdots+p^l-p)},$$

$m_q=q^{p^l\cdot\frac{1}{2}(q^m-q^{m-1}+q^m-q^{m-2}+\cdots+q^m-q)}$，由此得证。

定理 2.2

(i) 当 $G=C_p$ 时，$[K_1(\Gamma):K_1(\mathbf{Z}G)]=p-1$.

证明　由定理 2.1 可得

$$|D(\mathbf{Z}G)|\cdot[\Gamma^{\times}:(\mathbf{Z}G)^{\times}]=p-1.$$

又 $|D(\mathbf{Z}G)|=1$（见文献[8]），

因此 $[\Gamma^{\times}:(\mathbf{Z}G)^{\times}]=p-1$。

由文献[2]可知此时 $SK_1(\mathbf{Z}G)=0$，所以 $[\Gamma^{\times}:K_1(\mathbf{Z}G)]=p-1$。

又 Γ 为有限个代数整数环的乘积，K_1 与取单位群均与有限乘积交换，由文献[3]可知 $K_1(\Gamma)=\Gamma^{\times}$。

因此得到 $[K_1(\Gamma):K_1(\mathbf{Z}G)]=p-1$。

(ii) 当 $G=C_2\times C_p$ 时，其中 p 为奇素数。

则有 $(p-1)^2\,|\,[K_1(\Gamma):K_1(\mathbf{Z}G)]$，$[K_1(\Gamma):K_1(\mathbf{Z}G)]\,|\,(2^{f''}-1)^{g''}\cdot(p-1)^2/N(2,p)$，

其中 f'' 是使 $2^{f''}\equiv 1(\bmod p)$ 成立的最小正整数，$g''=\dfrac{p-1}{f''}$，

$$N(2,p)=\begin{cases}(2^{\frac{f''}{2}}+1)^{g''}/p, & f''\text{ 为偶数时}\\ (2^{f''}-1)^{\frac{g''}{2}}/p, & f''\text{ 为奇数时}\end{cases}.$$

特别地

当 $G=C_2\times C_5$ 时，$[K_1(\Gamma):K_1(\mathbf{Z}G)]=240$。

当 $G=C_2\times C_7$ 时，$[K_1(\Gamma):K_1(\mathbf{Z}G)]=1\,764$。

证明　由定理 2.1 可得

$$|D(\mathbf{Z}G)|\cdot[\Gamma^{\times}:(\mathbf{Z}G)^{\times}]=(2^{f''}-1)^{g''}\cdot(p-1)^2.$$

由文献[9]可知 $D(\mathbf{Z}G)$ 为 $(\mathbf{Z}[\omega]/2\mathbf{Z}[\omega])^{\times}$ 的商群，$\mathbf{Z}[\omega]/2\mathbf{Z}[\omega]=F_{2^{f''}}\times\cdots\times F_{2^{f''}}$，因此 $|D(\mathbf{Z}G)|\,|\,(2^{f''}-1)^{g''}$，可得 $(p-1)^2\,|\,[\Gamma^{\times}:(\mathbf{Z}G)^{\times}]$，类似于(i)，此即 $(p-1)^2\,|\,[K_1(\Gamma):K_1(\mathbf{Z}G)]$。

又由文献[10]可知 $N(2,p)\,|\,|D(\mathbf{Z}G)|$，因此 $[K_1(\Gamma):K_1(\mathbf{Z}G)]\,|\,(2^{f''}-1)^{g''}\cdot(p-1)^2/N(2,p)$。

特别地，当 $G=C_2\times C_5$ 时，由文献[11]可知 $|D(\mathbf{Z}G)|=1$，所以 $[K_1(\Gamma):K_1(\mathbf{Z}G)]=16\times 15=240$。

当 $G=C_2\times C_7$ 时，同样有 $|D(\mathbf{Z}G)|=1$，所以 $[K_1(\Gamma):K_1(\mathbf{Z}G)]=36\times 49=1\,764$。

(iii) 当 $G=C_p\times C_q$ 时，其中 p 与 q 为不同的奇素数。

则有

$$[K_1(\Gamma):K_1(\mathbf{Z}G)]\,\Big|\,\frac{4(p-1)\cdot(p^f-1)^g\cdot(q-1)\cdot(q^{f'}-1)^{g'}}{N(p,q)\cdot N(q,p)},$$

其中 f,g,f',g' 的定义与定理 2.1 一致，

$$N(p,q)=\begin{cases}(p^{\frac{f}{2}}+1)^{g}/q, & f\text{ 为偶数时}\\ (p^{f}-1)^{\frac{g}{2}}/q, & f\text{ 为奇数时}\end{cases},$$

$N(q,p)$ 的定义类似。

证明　由定理 2.1 可得 $|D(\mathbf{Z}G)|\cdot[\Gamma^{\times}:(\mathbf{Z}G)^{\times}]=(p-1)\cdot(p^f-1)^g\cdot(q-1)\cdot(q^{f'}-1)^{g'}$。

由文献[10]可知 $N(p,q)\cdot N(q,p)\,|\,4\cdot|D(\mathbf{Z}G)|$。

类似于(i)，$[\Gamma^{\times}:(\mathbf{Z}G)^{\times}]$ 即 $[K_1(\Gamma):K_1(\mathbf{Z}G)]$。所以有 $[K_1(\Gamma):K_1(\mathbf{Z}G)]\,\Big|\,\dfrac{4(p-1)\cdot(p^f-1)^g\cdot(q-1)\cdot(q^{f'}-1)^{g'}}{N(p,q)\cdot N(q,p)}$。

3　$G=C_{p^{n+1}}$ 时的情形

定理 3.1　$G=C_{p^{n+1}}$（$n\geqslant 0$，p 为正则奇素数，$C_{p^{n+1}}$ 表示 p^{n+1} 阶循环群）时，$[K_1(\Gamma):K_1(\mathbf{Z}G)]=(p-1)^{n+1}\cdot p^{1+p+p^2+\cdots+p^n-(n+1)-h}$，

其中 $h=\dfrac{n^2(p-3)}{2}+(n-1)\left[\dfrac{(n-1)(p^2-3p+2)}{2}+1\right]+\displaystyle\sum_{i=2}^{n-1}(n-i)\left[\frac{(n-i)p^{i-2}(p-1)^3}{2}+\frac{p^{i-2}(p-1)}{2}+1\right]$。

证明　易见 $\mathbf{Q}G=\mathbf{Q}\times\mathbf{Q}(\omega_1)\times\mathbf{Q}(\omega_2)\times\cdots\times\mathbf{Q}(\omega_{n+1})$，其中 $\omega_j=\mathrm{e}^{\frac{2\pi\mathrm{i}}{p^j}}$。

可得 $\Gamma=\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}[\omega_1]\times\mathbf{Z}[\omega_2]\times\cdots\times\mathbf{Z}[\omega_{n+1}]$。

类似定理 2.1，$\mathbf{Q}G\otimes_{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}_p=\mathbf{Q}_p\times\mathbf{Q}(\omega_1)_{(1-\omega_1)}\times\cdots\times\mathbf{Q}(\omega_{n+1})_{(1-\omega_{n+1})}$，

因此 $\Gamma_p/J_p=F_p\times\cdots\times F_p=F_p^{n+2}$，易见 $\mathbf{Z}G_p/J_p\cap\mathbf{Z}G_p=F_p$。

又 $d(\Gamma)=\displaystyle\prod_{j=1}^{n+1}p^{p^{j-1}(j\cdot p-j-1)}=p^{(n+1)p^{n+1}-2(1+p+p^2+\cdots+p^n)}$，

$d(\mathbf{Z}G)=(p^{n+1})^{p^{n+1}}$, $[\Gamma:\mathbf{Z}G]^2=d(\mathbf{Z}G)/d(\Gamma)$, 所以有 $[\Gamma:\mathbf{Z}G]=[\Gamma_p:\mathbf{Z}G_p]=p^{1+p+p^2+\cdots+p^n}$。

类似定理 2.1, $l_p=(p-1)^{n+1}$, $m_p=p^{1+p+\cdots+p^n-(n+1)}$, $|D(\mathbf{Z}G)|\cdot[\Gamma^\times:(\mathbf{Z}G)^\times]=|D(\mathbf{Z}G)|\cdot[K_1(\Gamma):K_1(\mathbf{Z}G)]=(p-1)^{n+1}\cdot p^{1+p+p^2+\cdots+p^n-(n+1)}$。又由文献[12]可知

$$D(\mathbf{Z}G)\cong(\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z})^{\frac{n(p-3)}{2}}\oplus(\mathbf{Z}/p^{n-1}\mathrm{Z})^{\frac{(n-1)(p^2-3p+2)}{2}+1}\oplus\sum_{i=2}^{n-1}(\mathbf{Z}/p^{n-i}\mathbf{Z})^{\frac{(n-i)p^{i-2}(p-1)^3}{2}+\frac{p^{i-2}(p-1)}{2}+1},$$

因此 $|D(\mathbf{Z}G)|=p^h$,

$$h=\frac{n^2(p-3)}{2}+(n-1)\left[\frac{(n-1)(p^2-3p+2)}{2}+1\right]+\sum_{i=2}^{n-1}(n-i)\left[\frac{(n-i)p^{i-2}(p-1)^3}{2}+\frac{p^{i-2}(p-1)}{2}+1\right]。$$

所以 $[K_1(\Gamma):K_1(\mathbf{Z}G)]=(p-1)^{n+1}\cdot p^{1+p+p^2+\cdots+p^n-(n+1)-h}$。

参考文献

[1] Fröhlich A. Locally free modules over arithmetic orders[J]. Journal für Mathematik. Band, 1975, 274(275): 15.

[2] Oliver R. Whitehead groups of finite groups[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1988.

[3] Rosenberg J. Algebraic K-theory and its applications[M]. New York: Springer Science & Business Media, 1995.

[4] Reiner I. Maximal orders[M]. London: Academic press, 1975.

[5] Higman G. The units of group-rings[J]. Proceedings of the London Mathematical Society, 1940, 2(1): 231-248.

[6] Fröhlich A. On the classgroup of integral grouprings of finite abelian groups[J]. Mathematika, 1969, 16(2): 143-152.

[7] Weiss E. Algebraic number theory[M]. New York: McGraw-Hill, 1963.

[8] Rim D S. Modules over finite groups[J]. Annals of Mathematics, 1959(69): 700-712.

[9] Reiner I, Ullom S. Class groups of integral group rings[J]. Transactions of the American Mathematical Society, 1972, 170: 1-30.

[10] Reiner I, Ullom S. A Mayer-Vietoris sequence for class groups[J]. Journal of Algebra, 1974, 31(2): 305-342.

[11] Cassou-Nogues P. Classes d'idéaux de l'algèbre d'un groupe abélien[J]. Mémoires de la Société Mathématique de France, 1974, 37: 23-32.

[12] Galovich S. The class group of a cyclic p-group[J]. Journal of Algebra, 1974, 30(1-3): 368-387.