

平行板受限下伊辛普适类临界 卡西米尔力的一种计算方法^{*}

陈东艳, 苗 兵[†]

(中国科学院大学材料科学与光电技术学院, 北京 100049)

(2018 年 4 月 8 日收稿; 2018 年 4 月 27 日收修改稿)

Chen D Y, Miao B. An effective method for calculating the critical Casimir force between two parallel plates for the Ising universality class[J]. Journal of University of Chinese Academy of Sciences, 2019, 36(4):487-490.

摘 要 研究统计力学中伊辛普适类的临界卡西米尔力。针对临界点上平行板几何约束下的伊辛普适类, 基于欧拉-麦克劳林求和法发展了一套计算临界卡西米尔力的有效方法。结果表明, 在平行板几何约束下, 伊辛普适类临界卡西米尔力表现为以标度指数为-3 的方式随板间距离衰减的长程吸引力。

关键词 临界卡西米尔力; 伊辛普适类; 平行板受限; 欧拉-麦克劳林求和

中图分类号: O414.2 **文献标志码:** A **doi:** 10.7523/j.issn.2095-6134.2019.04.007

An effective method for calculating the critical Casimir force between two parallel plates for the Ising universality class

CHEN Dongyan, MIAO Bing

(College of Materials Science and Opto-Electronic Technology, University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China)

Abstract Due to the constraints introduced by boundaries for the long range fluctuations in a massless field, a long-range fluctuation-induced effective force between boundaries is induced, and it is called the Casimir force. The classical Casimir force refers to the interaction between two conducting plates immersed in a vacuum, and it is originated from the quantum fluctuations of the electromagnetic field. In this work, we study the critical Casimir force for the Ising universality class in statistical mechanics. Specifically, we develop an effective method, namely, the Euler-Maclaurin summation method, to calculate the critical Casimir force between two parallel plates at the critical point of the Ising universality class. Our results demonstrate that, in this geometric set-up, the critical Casimir force behaves as a long-range attractive force with a scaling exponent of -3 with respect to the boundary distance.

Keywords critical Casimir force; Ising universality class; parallel plates confinement; Euler-Maclaurin summation

^{*} 国家自然科学基金(21774131, 21544007)资助

[†] 通信作者, E-mail: bmiao@ucas.ac.cn

卡西米尔效应是 1948 年由著名荷兰物理学家 Casimir^[1] 发现的。Casimir 通过计算预测置于真空中的两块无穷大平行导体板, 由于对真空量子涨落的边界约束, 从而板间会诱导产生一个长程吸引力, 即卡西米尔力, 该现象称为卡西米尔效应, 是真空零点能的一种物理体现。

由于卡西米尔力是一个微弱的力, 所以在实验上进行验证比较困难。对卡西米尔效应的实验验证, 最早来自于 Sparnaay^[2] 在 1958 年进行的一个实验, Sparnaay 利用弹簧巧妙地构造了一个电容器, 力的变化体现为容易测量的电容量的变化, 从而定性地从实验上验证了卡西米尔力的存在。随着实验技术的进步, 人们越来越追求实验的精度, 美国华盛顿大学的 Lamoreaux^[3] 在 1997 年率先以足够的精度从实验上验证了卡西米尔力, 实现了卡西米尔力的定量测量。Lamoreaux 测量的是一个镀金圆球透镜与一块金属板之间的卡西米尔力, 金属板与一个精准的扭秤相连, 测量精度在 5%~10%。1998 年, Mohideen 和 Roy^[4] 使用激光技术更精确地测量了镀铝平板和小球之间的卡西米尔力, 精度达到 1%。

对经典卡西米尔效应的研究持续了半个多世纪, 研究越来越细致和深入, 有大量的研究成果。在理论研究方面, 人们主要集中在研究不同的几何构型和边界条件下的卡西米尔力, 详见综述性文献[5-9]。

20 世纪 70 年代, 人们发现只要在存在长程关联的涨落场中引入边界约束, 边界间就会产生一个由涨落所诱导的力, 这种力被称为广义的卡西米尔力。由真空涨落所引起的卡西米尔力只是其中的一种, 另外如统计力学临界点处的密度场等, 这些具有长程涨落特性的场都可以满足产生卡西米尔力的条件。1978 年, Fisher 和 De Gennes^[10] 首次将经典的卡西米尔效应推广到热卡西米尔效应或者临界卡西米尔效应, 涨落背景场由量子涨落替换为临界点处的长程密度涨落, 开辟了临界卡西米尔效应研究的新领域。

近年来, 在对临界卡西米尔效应的研究中, 一个研究重点是在统计力学伊辛普适类中平行板几何约束下的卡西米尔力, 包括平衡态的临界卡西米尔力和非平衡态的卡西米尔力^[11]。

本文研究伊辛普适类在平行板受限下的临界卡西米尔力, 不同于常用的场论方法^[12-13], 我们基于欧拉-麦克劳林求和法 (Euler-Maclaurin

summation), 发展了一套计算两块平行板之间临界卡西米尔力的有效方法, 这种方法得到的结果与用场论方法得到的结果基本一致, 并且简单易操作。计算结果表明, 在平行板几何约束下, 伊辛普适类的临界卡西米尔力表现为一种长程吸引力, 与边界间距的标度指数为 -3, 该标度指数与标度分析的结果一致。

1 模型描述

如图 1 所示, 考虑在伊辛普适类中, 板间距离为 a 的平行板受限体系中的临界卡西米尔效应。方便起见, 取热能 $k_B T = 1$ 。在边界上, 采用 Dirichlet 边界条件, 即要求边界上密度场为零。该边界条件使得垂直于平板方向的涨落模式离散化: $(q_z = n\pi/a)$, 其中 $n = 1, 2, \dots$ 。涨落波矢大小为 $q^2 = |\mathbf{q}_{\parallel}|^2 + q_z^2$, 其中 \mathbf{q}_{\parallel} 表示平行于平板方向的二维波矢。注意在本文中所有的长度都已由体系的微观相互作用力程约化为无量纲量。

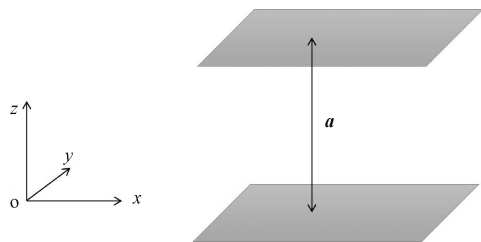


图 1 板间距离为 a 的平行板受限体系

Fig.1 Confinement set-up of parallel plates with the distance a

由统计力学可知, 伊辛普适类在临界点上的高斯涨落自由能写成如下形式

$$\frac{F}{A} = \frac{1}{2} \int \frac{d^2 \mathbf{q}_{\parallel}}{(2\pi)^2} \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left[\left(\frac{n\pi}{a} \right)^2 + q_{\parallel}^2 \right], \quad (1)$$

式中: A 是平行板的面积。显然, 这是一个无穷大的量, 为了对其进行正规化处理, 仿照量子场论的做法^[14], 引入正规化因子 $e^{-\ln[(\frac{n\pi}{a})^2 + q_{\parallel}^2]/\Lambda}$, 这里, Λ 是截断常数。完成所有计算后, 将令 $\Lambda \rightarrow \infty$ 。此时, 自由能写成

$$\frac{F}{A} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x)}{A}. \quad (2)$$

这里定义 $x = 1/\Lambda$, 并且

$$\begin{aligned} \frac{F(x)}{A} &= \frac{1}{2} \int \frac{d^2 \mathbf{q}_{\parallel}}{(2\pi)^2} \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left[\left(\frac{n\pi}{a} \right)^2 + q_{\parallel}^2 \right] e^{-x \ln \left[\left(\frac{n\pi}{a} \right)^2 + q_{\parallel}^2 \right]} \\ &= -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \int \frac{d^2 \mathbf{q}_{\parallel}}{(2\pi)^2} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-x \ln \left[\left(\frac{n\pi}{a} \right)^2 + q_{\parallel}^2 \right]} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \int \frac{d^2 q_{\parallel}}{(2\pi)^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{n\pi}{a} \right)^2 + q_{\parallel}^2 \right]^{-x} \\
 &= -\frac{1}{8\pi} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{x-1} \left(\frac{\pi}{a} \right)^{-2(x-1)} \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2(x-1)} \right].
 \end{aligned} \quad (3)$$

其中, 在对平行波矢的积分结果中, 舍去了与无穷大有关的项, 因为最后计算卡西米尔力的涨落自由能只需要保留有限大小的项。

2 欧拉-麦克劳林求和法

为了计算上式中的无穷级数求和, 采用欧拉-麦克劳林求和法。欧拉-麦克劳林求和公式是一个将积分与求和联系起来的式子, 被数学家和物理学家广泛应用, 其具体表达式(只取到 3 阶导数)如下

$$\begin{aligned}
 \int_a^b f(t) dt &= \left[\frac{f(a)}{2} + f(a+h) + \cdots + \frac{f(b)}{2} \right] h + \\
 &\quad \frac{1}{12} [f'(a) - f'(b)] - \\
 &\quad \frac{1}{720} [f'''(a) - f'''(b)].
 \end{aligned} \quad (4)$$

式中: $f(t)$ 表示一个可微函数, a 和 b 是积分限常数, h 是离散步长。

定义函数 $f(t) = t^{-2(x-1)}$, 取离散步长 $h = 1$, 根据欧拉-麦克劳林公式有

$$\begin{aligned}
 \int_1^{\infty} t^{-2(x-1)} dt &= \frac{1^{-2(x-1)}}{2} + 2^{-2(x-1)} + \cdots + \infty + \\
 &\quad \frac{1}{12} f'(1) - \frac{1}{720} f'''(1) \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2(x-1)} - \frac{1}{2} + \frac{1}{12} f'(1) - \\
 &\quad \frac{1}{720} f'''(1) + \infty.
 \end{aligned} \quad (5)$$

其中,

$$\begin{aligned}
 f'(t) &= -2(x-1)t^{-2x+1}, \\
 f'''(t) &= -4x(x-1)(2x-1)t^{-2x-1}, \\
 f'(1) &= -2(x-1), \\
 f'''(1) &= -4x(x-1)(2x-1).
 \end{aligned} \quad (6)$$

这里, 将所有与无穷大有关的项归并, 用 ∞ 表示。简单的运算可得

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2(x-1)} &= \int_1^{\infty} t^{-2(x-1)} dt + \frac{1}{2} + \frac{1}{6}(x-1) - \\
 &\quad \frac{1}{180} x(x-1)(2x-1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \infty + \frac{1}{2} + \frac{1}{6}(x-1) - \\
 &\quad \frac{1}{180} x(x-1)(2x-1) + \frac{1}{2x-3}.
 \end{aligned} \quad (7)$$

同样, 所有与无穷大有关的项已经用 ∞ 表示。进一步, 得到

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2(x-1)} = 0. \quad (8)$$

这里, 类似于量子场论中由无穷的真空零点能计算卡西米尔力的方法, 已经舍去无穷大, 只取了有限部分。

我们注意到黎曼函数的级数定义为

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-z}, \quad (9)$$

因此易知, 要求算的无穷级数可用黎曼函数表示如下

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2(x-1)} = \zeta(2(x-1)). \quad (10)$$

由黎曼函数的性质有

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \zeta(2(x-1)) = \zeta(-2) = 0. \quad (11)$$

显然, 这一结果与我们用欧拉-麦克劳林求和法得到的结果(8)一致。

由式(7), 进一步可得

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial x} \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2(x-1)} &= \frac{1}{6} - \frac{1}{30} \left(x^2 - x + \frac{1}{6} \right) - \\
 &\quad \frac{1}{2(x-3/2)^2}.
 \end{aligned} \quad (12)$$

同样, 只保留有限部分。由此可得

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial x} \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2(x-1)} = -\frac{11}{180}. \quad (13)$$

综合以上结果, 得到涨落自由能如下

$$\begin{aligned}
 \frac{F}{A} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x)}{A} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{8\pi} \left[\frac{1}{(x-1)^2} \left(\frac{\pi}{a} \right)^{-2(x-1)} + \frac{2}{x-1} \left(\frac{\pi}{a} \right)^{-2(x-1)} \ln \left(\frac{\pi}{a} \right) \right] \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2(x-1)} \right] + \\
 &\quad \lim_{x \rightarrow 0} \left[-\frac{1}{8\pi} \frac{1}{x-1} \left(\frac{\pi}{a} \right)^{-2(x-1)} \frac{\partial}{\partial x} \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2(x-1)} \right] \\
 &= -\frac{11\pi}{1440} \frac{1}{a^2} \approx -0.024a^{-2}.
 \end{aligned} \quad (14)$$

该结果与场论结果^[13]基本一致。

进一步,临界卡西米尔力由涨落自由能对边界距离的导数得到,即

$$f(a) = - \frac{\partial}{\partial a}(F/A) = - \frac{11\pi}{720a^3} \approx - 0.048a^{-3}. \tag{15}$$

由该结果可知,对于伊辛普适类,平行板受限下的临界卡西米尔力表现为一个长程吸引力,并且与板间距离的标度指数为-3。

3 标度分析

本小节对临界卡西米尔力的标度指数做简单的标度分析。

这里定义的临界卡西米尔力表现为两平行板之间的分离压(disjoining pressure),因此有 $[f] = E/L^3$, 这里 E 和 L 分别代表能量和长度。注意,能量已由热能约化。在伊辛普适类中,临界点上涨落的关联长度发散,因此不允许存在一个有限大小的关联长度进入临界卡西米尔力的表达式。体系中只有两平行板之间的距离是可以进入最后结果的特征长度,因此,立即得到 $f \propto a^{-3}$, 这正是本文得到的标度指数。需要指出的是虽然标度指数可以通过标度分析得到,然而临界卡西米尔力在特定几何约束和边界条件下表现为吸引或排斥,只能通过具体计算得到。

4 结论

本文应用欧拉-麦克劳林求和公式对卡西米尔效应进行研究,对平行板受限下伊辛普适类的临界卡西米尔力进行解析推导,基于欧拉-麦克劳林求和公式与黎曼函数的相关知识发展出一套计算临界卡西米尔力的有效方法。此方法对研究其他体系中的卡西米尔效应具有重要的借鉴意义。在未来的工作中,我们将尝试将该方法用于其他受限几何,以及其他统计力学普适类中临界卡西米尔力的计算。

参考文献

[1] Casimir H B G. On the attraction between two perfectly conducting plates[J]. Proc Kon Ned Akad Wet, 1948, 51: 793-795.

[2] Sparnaay M J. Measurements of attractive forces between flat plates[J]. Physica, 1958, 24(6-10): 751-764.

[3] Lamoreaux S K. Demonstration of the Casimir force in the 0.6 to 6 μm range[J]. Physical Review Letters, 1997, 78(1): 5-8.

[4] Mohideen U, Roy A. Precision measurement of the Casimir force from 0.1 to 0.9 μm [J]. Physical Review Letters, 1998, 81(21): 4 549-4 552.

[5] Plunien G, Müller B, Greiner W. The casimir effect [J]. Physics Reports, 1986, 134(2/3): 87-193.

[6] Elizalde E, Romeo A. Essentials of the Casimir effect and its computation[J]. American Journal of Physics, 1991, 59: 711-719.

[7] Kardar M, Golestanian R. The “friction” of vacuum, and other fluctuation-induced forces [J]. Reviews of Modern Physics, 1999, 71(4): 1 233-1 245.

[8] Bordag M, Klimchitskaya G L, Mohideen U, et al. Advances in the Casimir effect[M]. Oxford: OUP Oxford, 2009.

[9] Lamoreaux S K. The Casimir force; background, experiments, and applications [J]. Reports on Progress in Physics, 2004, 68(1): 201-236.

[10] Fisher M E, De Gennes P G. Wall phenomena in a critical binary mixture [J]. Comptes Rendus Hebdomadaires Des Seances De L Academie Des Sciences Serie B, 1978, 287 (8): 207-209.

[11] Aminov A, Kafri Y, Kardar M. Fluctuation-induced forces in nonequilibrium diffusive dynamics [J]. Physical Review Letters, 2015, 114(23): 230 602.

[12] Uchida N. Casimir effect in fluids above the isotropic-lamellar transition[J]. Physical Review Letters, 2001, 87 (21): 216 101.

[13] Li H, Kardar M. Fluctuation-induced forces between manifolds immersed in correlated fluids[J]. Physical Review A, 1992, 46(10): 6 490-6 500.

[14] Zee A. Quantum field theory in a nutshell[M]. Princeton: Princeton university press, 2010.