文章编号:2095-6134(2019)05-0590-08

平行/重合 D 膜超势,Ooguri-Vafa 不变量与类型 II 弦理论/F 理论对偶*

蒋笑添,杨富中†

(中国科学院大学物理科学学院, 北京 100049)

(2018 年 4 月 17 日收稿; 2018 年 5 月 9 日收修改稿)

Jiang X T, Yang F Z. Parallel/coincident D-brane superpotentials, Ooguri-Vafa invariants, and Type II/F theory duality[J]. Journal of University of Chinese Academy of Sciences, 2019,36(5):590-597.

摘 要 利用类型 II 弦理论/F 理论对偶,第一次在平行和重合相区计算一个具体的双 D 膜系统的超势,并提取 Ooguri-Vafa 不变量。平行 D 膜相与重合 D 膜相间的相变也对应着 D 膜世界叶上规范理论规范对称性的提升 $U(1)\times\cdots\times U(1)\rightarrow U(n)$。计算显示这两个相区的超势截然不同,并给出不同的 Ooguri-Vafa 不变量。这意味着相变的发生导致两个相区能谱结构的差异。

关键词 类型 II 弦理论/F 理论对偶;相变;超势;Ooguri-Vafa 不变量

中图分类号:O41 **文献标志码:**A **doi:**10.7523/j.issn.2095-6134.2019.05.003

Parallel/coincident D-brane superpotentials, Ooguri-Vafa invariants, and Type II/F theory duality

JIANG Xiaotian, YANG Fuzhong

(*School of Physical Sciences, University of Chinese Academy of Sciences, Beijing* 100049, *China*)

Abstract The superpotential is very important physical observation in the topological string theory, and it determines the F-term of the low-energy effective theory and the string vacuum structure. Ooguri-Vafa invariants, as the counting number of BPS states, can be extracted from the superpotential, giving rise to the energy spectrum of the D-brane system. We compute the superpotentials and Ooguri-Vafa invariants for complicated D-brane system, namely double D-branes system, in the parallel and coincident phases using the Type II/F theory duality for the first time. The coincidence of parallel D-branes leads to the enhancement of gauge symmetry $U(1)\times\cdots\times U(1)\rightarrow U(n)$ in terms of gauge theory on the worldvolume of the D-branes being known as the phase transition between the parallel D-brane phase and the coincident D-brane phase. We find the difference between the Ooguri-Vafa invariants for the two phases giving rise to the distinct spectra. It

* 国家自然科学基金(11475178, Y4JT01VJ01)资助

† 通信作者,E-mail:fzyang@ ucas.ac.cn

can be viewed as an evidence of the phase transition.

Keywords Type II/F-theory duality; phase transition; superpotential; Ooguri-Vafa invariants

在拓扑弦理论中,$N=2$ 的镜像对称将两个几何上不同的作为弦紧致化的 Calabi-Yau 流形联系起来,给出等价的物理模型。其中一个是由 Kahler 模参数决定的 A 模型,另一个是由复结构参数决定的 B 模型。引入 D 膜后超对称破缺到 $N=1$,对应地给出到 $N=1$ 的特殊几何,此时 A/B 模型间存在开闭镜像对称。类似于 $N=2$ 超对称拓扑弦论中的预势,超对称为 $N=1$ 时,对应于预势的物理量被称为非微扰全纯超势。它决定了低能有效理论中的 F 项和弦真空结构。与预势类似,得益于 $N=1$ 的镜像对称非微扰有效超势可以通过在 B 模型中微扰计算得到。

考虑嵌入在 Calabi-Yau 三流形 M_3 的除子 D 中的可约曲线 $C=\sum_i C_i$,将时空填充的 D 膜缠绕在 C 上面,那么有效超势可以由相对周期给出。相对周期即全纯(3,0)形式 $\Omega^{(3,0)}(z,\hat{z})$ 在相对同调群 $H_3(M_3,D)$ 中的元素 γ 上的积分:

$$W_{N=1}(z,\hat{z})=\Pi_\gamma(z,\hat{z})=\int_\gamma \Omega^{(3,0)}(z,\hat{z}), \quad (1)$$

式中:z 和 $\hat{z}$ 分别表示闭弦模参数和开弦模参数。因此四维有效超势可以表示为相对周期基矢的线性组合[1-2]:

$$\begin{aligned} W_{N=1}(z,\hat{z}) &= \sum N_\alpha \Pi_\alpha(z,\hat{z}) \\ &= W_{open}(z,\hat{z})+W_{closed}(z). \end{aligned} \quad (2)$$

其中的组合系数 N_α 由 D 膜与背景流的拓扑荷决定,而 $\Pi_\alpha(z,\hat{z})$ 表示开闭混合的相对周期积分。

另一方面,类型 II 弦理论中的超势可以在 F 理论中找到一个对偶的描述。使得类型 II 弦理论中的 D 膜超势对偶于 F 理论中的背景流超势。而背景流超势由作为 F 理论紧化靶空间的四流形的复结构参数给出。换句话说,在 F 理论中,其对偶类型 II 弦理论中的开弦模与闭弦模被等同化为复结构参数存在[3]。这个对偶的存在也就提供了一种计算类型 II 弦理论中的 D 膜超势的思路,允许我们研究在类型 II 弦理论意义下的更为复杂的 D 膜系统。紧化在 Calabi-Yau 三流形上的类型 II 弦理论的 D 膜超势可以通过在其对偶的,紧化在 Calabi-Yau 四流形上的 F 理论中的计算得到[4]。四维 F 理论中,在 Calabi-Yau 四流形 M_4 上的四形式流 G_4 贡献的超势实际上是以复结构模空间 $M_{CS}(M_4)$ 为底的一个复线丛截面,也就是著名的 Gukov-Vafa-Witten 超势[5],形式如下[6]:

$$\begin{aligned} W_{\mathrm{GVW}} &= \int_{M_4} G_4 \wedge \Omega^{(4,0)} \\ &= \sum_\sigma N_\sigma(G_4)\Pi_\sigma(z,\hat{z}) + O(g_s) + \\ &\quad O(\mathrm{e}^{-1/g_s}). \end{aligned} \quad (3)$$

式中:g_s 是弦耦合强度而等式右边的领头项正是 D 膜超势 $W_{N=1}$ 公式(1)。当取得弱耦合极限 $g_s\to 0$ 时,由 F 理论的 GVW 超势 W_{GVW} 可以得到 D 膜超势 $W_{N=1}$:

$$\begin{aligned} \lim_{g_s\to 0} W_{\mathrm{GVW}}(M_4) &= \sum_\sigma N_\sigma(G_4)\Pi_\sigma(z,\hat{z}) \\ &= W_{N=1}(M_3,D). \end{aligned} \quad (4)$$

此时大部分的耦合自由度不再贡献到超势中来。

迄今为止,对于靶空间紧致的大部分 D 膜系统的超势计算都只涉及一个开弦形变参数[4,7-13]。我们利用类型 II 弦理论/F 理论对偶中开闭弦模等价于复结构参数,以及复结构等信息完全包含在 F 理论的紧化四流形的组合数据中的优点,研究包含两张 D 膜的复杂 D 膜系统。D 膜系统的平行相区与重合相区分别对应于 D 膜世界叶上的 $U(1)\times\cdots\times U(1)$ 与 $U(n)$ 非阿贝尔规范理论。本文利用类型 II 弦理论/F 理论对偶,计算以 $P(1,1,2,2,6)$ 为靶空间的双 D 膜系统的超势,并提取对应于平行相与重合相的 $U(1)$ 和 $U(2)$ Ooguri-Vafa 不变量。

1 平行/重合相的对偶四流形构造

本文讨论的 Calabi-Yau 流形为环簇环绕空间中的超曲面。篇幅所限,更详细的环簇的背景知识参见文献[14-17]。这里给出符号定义如下:(∇_4,Δ_4) 是一对相互反射的多面体。(W_3,M_3) 是一对镜像三流形,由环绕环簇 $(P_{\Sigma(\nabla_4)},P_{\Sigma(\Delta_4)})$ 中的超曲面定义。环簇 $P_{\Sigma(\Delta_4)}$ 由扇 $\Sigma(\Delta_4)$ 给出,而扇由一组包含多面体 Δ_4 各个面的锥构成。超曲面 M_3 则由多面体∇_4上的 p 个整点定义,即多项式 P 在环簇 $P_{\Sigma(\Delta_4)}$ 中的零截面:

$$P=\sum_{i=0}^{p-1} a_i \prod_{v_j\in\Delta_4} x_j^{\langle v_j, v_i^*\rangle+1}, \quad (5)$$

式中：v_i^* 是∇_4 上的整点，v_j 是对偶多面体 Δ_4 的顶点，而系数 a_i 是与 M_3 复结构参数相关的复参数。

我们考虑的 n 个平行 D 膜由可约除子表示：

$$Q(D)=\prod_{m=0}^{n-1}\left(\phi_m a_0\prod_{v_j\in\Delta_4}x_j+a_i\prod_{v_j\in\Delta_4}x_j^{\langle v,v_i^*\rangle+1}\right)=\sum_{k=0}^{n}b_k\prod_{v_j\in\Delta_4}x_j^{k\langle v,v_i^*\rangle+n}. \tag{6}$$

式中的不可约分支位于同一个单参数除子族 $D_s\equiv\phi a_0\prod_{v_j\in\Delta_4}x_j+a_i\prod_{v_j\in\Delta_4}x_j^{\langle v,v_i^*\rangle+1}$。参数 b_k 描述 n 个 D 膜的开弦形变，而单个 D 膜的形变参数 ϕ_m 则分别描述 n 个平行 D 膜的位置状态。平行 D 膜相对应于规范理论的库伦分支，此时规范对称群为 $U(1)\times U(1)\times\cdots\times U(1)$，$n$ 个 $U(1)$ 相乘，其中每个 $U(1)$ 群描述包含库伦场的电磁理论。

类似于文献[13]中的构造，平行 D 膜的组合数据可以完全由一个高一维的多面体$\tilde{\nabla}_5$ 记录。$\tilde{\nabla}_5$ 则给出非紧的四流形 $\tilde{W}_4$。扩展多面体 $\tilde{\nabla}_5$ 的构造方式如下：

$$\tilde{v}_j^*=\begin{cases}(v_j^*,0) & j=0,\cdots,p-1\\ (mv_i^*,1) & j=p+m,0\leqslant m\leqslant n\end{cases}. \tag{7}$$

当平行 D 膜相互靠近并重合在一起时，规范群 $U(1)\times U(1)\times\cdots\times U(1)$ 提升为 $U(n)$。几何上看，非阿贝尔规范群与新构造的 Calabi-Yau 流形上的奇异性有关。这里用环几何的语言来描述，奇异曲线对应于对偶多面体的一维棱上的整点。环几何意义下的奇点减消过程是标准化的[18]，即将这些棱上的整点全部补入环簇的定义点集，而补入的每一个点都对应于一个奇点减消后的 Calabi-Yau 流形上的例外除子，这个过程被称为吹胀(blow up)。

注意到我们在构造库伦相的扩展多面体时，在一条棱上加了 $n+1$ 个新点描述 n 个平行的 D 膜，而填充在中间的 $n-1$ 个整点正好减消了忽略它们时带来的 $\mathbb{Z}_n$ 奇异性。反过来想，可以通过抹去这 $n-1$ 个内点恢复四流形的奇异性，进而构造重合相对应的多面体，给出提升后的 $U(n)$ 规范群[19]。值得一提的是 $\mathbb{Z}_n$ 曲线奇异性对应的例外除子的相交矩阵与 A_{n-1} 的卡丹矩阵只相差一个自交归一化参数-1。

另外为了得到真正的 F 理论紧化四流形，进一步紧化非紧四流形 $\tilde{W}_4$。在超平面 $Y=\{v\in\mathbb{R}^5\mid v_5=0\}$ 下方补充一个点，加上描述原紧化空间的点与描述 D 膜的点，所有的点定义了多面体 ∇_5，也给出了真正的 F 理论紧化四流形 W_4。

2 Picard-Fuchs 微分方程组，局域解与相对周期

相对周期满足 Picard-Fuchs 微分方程组，而其微分算子可由 GKZ 系统较为方便地导出：

$$L(l^a)=\prod_{k=1}^{l_0^a}(\vartheta_0-k)\prod_{l_j^a>0}\prod_{k=0}^{l_j^a-1}(\vartheta_j-k)-(-1)^{l_0^a}z_a\prod_{k=1}^{-l_0^a}(\vartheta_0-k)\prod_{l_j^a<0}\prod_{k=0}^{-l_j^a-1}(\vartheta_j-k), \tag{8}$$

式中：$\vartheta_j=a_j\dfrac{\partial}{\partial a_j}$是对 a_j 的对数求导算符，l^a 是环簇 $P_{\Sigma(\nabla_5)}$ 的 Mori 锥生成元[20-23]。这些生成元也被称为规范线性西格玛模型(GLSM)的荷矢量[24]，$a\in\{1,\cdots,k=h^{1,1}(W_4)\}$。

一方面，荷矢量 l^a 对应于∇_5的最大三角剖分，也就给出了 M_4 模空间中大复结构极限点附近的局域坐标：

$$z_a=(-1)^{l_0^a}\prod_j a_j^{l_j^a}. \tag{9}$$

在大复结构相区，非微扰瞬子修正被以指数形式压制在这些复结构参数中。这组代数坐标环操作不变，可以对该相区进行很好的描述。另一方面，Mori 锥与 Kahler 锥相互对偶，Mori 锥生成元 l^a 的选定也给出了 Kahler 锥的一组对偶基，记做 $J_a\in H^{1,1}(W_4)$。将对应的局域坐标记为 k_a，由于大复结构极限点对偶于大半径极限点，k_a 即 Kahler 模空间中的大半径极限点附近坐标，也被称为平坦坐标。

从 F 理论的观点来看，GKZ 系统的算子由对应四流形的 5 维多面体的组合数据导出。所以该微分系统的解描述了四流形的周期积分，并依赖于四流形的复结构参数。然而从类型 II 弦理论的观点来看，由于拓展多面体描述的是 D 膜系统的几何结构，这些局域解记录着开闭镜像映射，D 膜超势等与开闭弦模相关的物理量。

在四流形这边，由文献[17]可知 GKZ 系统的局域解可以由基本周期导出，基本周期为

$$w_0(z;\rho)=\sum_{m_1,\cdots,m_a\geqslant0}\frac{\Gamma\left(-\sum_a(m_a+\rho_a)l_0^a+1\right)}{\prod_{1\leqslant i\leqslant p}\Gamma\left(\sum_a(m_a+\rho_a)l_i^a+1\right)}z^{m+\rho}. \tag{10}$$

使用 Frobenius 方法可以得到整个周期矢量如下

$$\boldsymbol{\Pi}(z)=\begin{pmatrix}\Pi_0 = & w_0(z;\rho)\mid_{\rho=0}\\ \Pi_{1,a} = & \partial_{\rho_a}w_0(z;\rho)\mid_{\rho=0}\\ \Pi_{2,n} = & \sum_{a_1,a_2}K_{a_1,a_2;n}\partial_{\rho_{a_1}}\partial_{\rho_{a_2}}w_0(z;\rho)\mid_{\rho=0}\\ & \vdots\end{pmatrix}. \tag{11}$$

式中:$n\in\{1,\cdots,h\}$,h 等于上同调群 $H^4(M_4)$ 的维数。公式(11)中 $K_{a_1,a_2;n}$ 为基本周期 w_0 二阶导的组合系数。镜像对称猜想给出 A 模型一侧的对偶周期矢量如下:

$$\boldsymbol{\Pi}^*(k)=\begin{pmatrix}\Pi_0^* = & 1\\ \Pi_{1,a}^* = & k_a\\ \Pi_{2,n}^* = & \sum_{a_1,a_2}K^*_{a_1,a_2;n}k_{a_1}k_{a_2}+b_n+F_n^{\text{inst}}\\ & \vdots\end{pmatrix}. \tag{12}$$

式中:$k_a=\boldsymbol{\Pi}_{1,a}/\boldsymbol{\Pi}$ 即上文所提的平坦坐标,且 $K^*_{a_1,a_2;n}=K_{a_1,a_2;n}$。领头阶的组合系数 $K^*_{a_1,a_2;n}$ 决定了超势的经典项,它可以由对偶于四形式背景流 G_4 的四维环 $\boldsymbol{\pi}_4^*\in H_4(W_4,\boldsymbol{Z})$ 上的积分得到。b_n 是与我们讨论无关的常数,F_n^{inst} 为解的瞬子修正部分。

在 D 膜几何的相对周期这侧,取到弱耦合极限时,上面四流形对应的 GKZ 系统的解将给出对应于开闭镜像映射,体势能(bulk potential),超势的相对周期。相对周期矢量有如下形式

$$\lim_{g_s\to 0}\boldsymbol{\Pi}^*(k)=(1,t,\hat{t},F_t(t),W(t,\hat{t}),\cdots). \tag{13}$$

式中:t 与 $\hat{t}$ 分别为开闭平坦坐标;$F_t(t)\equiv\partial_t F(t)$ 只依赖于闭弦模 t,$F(t)$ 为 N=2 预势,它在开弦部分的对应项为超势 $W(t,\hat{t})$。平坦坐标可以分别在 A 模型的大半径极限点与 B 模型的大复结构极限点附近找到,它们之间的对应关系定义了镜像映射如下

$$k_a(z)=\frac{\boldsymbol{\Pi}_{1,a}(z)}{\boldsymbol{\Pi}_0}. \tag{14}$$

通过对 $\{k_a\}$ 线性组合可以将开闭弦 Kahler 模参数分离。

瞬子修正项可以写为 $q_i=\exp(2\pi\mathrm{i}t_i)$ 和 $\hat{q}_i=\exp(2\pi\mathrm{i}\hat{t}_i)$ 的级数展开:

$$F^{\text{inst}}(t,\hat{t})=\sum_{\vec{r},\vec{s}}G_{\vec{r},\vec{s}}q^r\hat{q}^s=\sum_n\sum_{\vec{r},\vec{s}}\frac{N_{\boldsymbol{r},\boldsymbol{s}}}{n^2}q^{nr}\hat{q}^{ns}. \tag{15}$$

(15)式中以相对同伦类 $\boldsymbol{s}\in H_1(L)$,$\boldsymbol{r}\in H_2(W_3)$ 为指标的 $\{G_{\boldsymbol{r},\boldsymbol{s}}\}$ 为 Gromov-Witten 不变量,$\{N_{\boldsymbol{r},\boldsymbol{s}}\}$ 为 Ooguri-Vafa 不变量。

3 超势计算与 Ooguri-Vafa 不变量提取

本节我们将以双 D 膜在 $P(1,1,2,2,6)$ 上为例,利用类型 II 弦理论/F 理论对偶进行超势的计算与 Ooguri-Vafa 不变量的提取。三流形 $P(1,1,2,2,6)$ 是由在环绕环簇 $P_{\Sigma(\Delta_4)}$ 中的多项式

$$P=a_1x_1^{12}+a_2x_2^{12}+a_3x_3^6+a_4x_4^6+a_5x_5^2+a_6x_1^6x_2^6+a_0x_1x_2x_3x_4x_5 \tag{16}$$

定义的超曲面给出的。定义环簇的多面体 Δ_4 顶点如下:

$$\begin{aligned}&v_1=(1,1,1,1),v_2=(-11,1,1,1),\\&v_3=(1,-5,1,1),\\&v_4=(1,1,-5,1),v_5=(1,1,1,-1).\end{aligned} \tag{17}$$

3.1 平行 D 膜相

我们考虑由可约除子 $D=D_1+D_2$ 描述的平行 D 膜。其定义多项式为

$$Q=b_0(x_1x_2x_3x_4x_5)^2+b_1x_1x_2x_3x_4x_5^3+b_2x_5^4\sim\prod_{i=1}^{2}(\phi_ia_0x_1x_2x_3x_4x_5+a_2x_5^2). \tag{18}$$

根据第 2 节阐述的构造方法,描述开闭系统的扩展多面体 $\tilde{\nabla}_5$ 顶点如下:

$\tilde{v}_0^*=(0,0,0,0,0)$,$\tilde{v}_1^*=(1,2,2,6,0)$,$\tilde{v}_2^*=(-1,0,0,0,0)$,$\tilde{v}_3^*=(0,-1,0,0,0)$,$\tilde{v}_4^*=(0,0,-1,0,0)$,$\tilde{v}_5^*=(0,0,0,-1,0)$,$\tilde{v}_6^*=(0,1,1,3,0)$,$\tilde{v}_7^*=(0,0,0,0,1)$,$\tilde{v}_8^*=(0,0,0,-1,1)$,$\tilde{v}_9^*=(0,0,0,-2,1)$. (19)

此时 $\tilde{\nabla}_5$ 对应的四流形非紧,为得到 F 理论紧化四流形 W_4 对应的多面体 $\tilde{\nabla}_5$,除(19)中的顶点补充一个顶点 $\tilde{v}_c^*=(0,0,0,0,-1)$。

$\tilde{\nabla}_5$ 对应的 Mori 锥生成元为:

$$
\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & & & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & c & \\
l^1 & = & (& -3 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & -3 & 3 & 0 & 0 &) \\
l^2 & = & (& 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 &) \\
l^3 & = & (& 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 &) \\
l^4 & = & (& -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 &) \\
l^5 & = & (& 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 &)
\end{array}. \tag{20}
$$

Kahler 形式可写为 $J = \sum_a k_a J_a$，$\{J_a\}$ 对偶于 Mori 锥生成元(20)，构成上同调群 $H^{1,1}(W_4)$ 的基。这里的 k_a 即镜像四流形 W_4 的 Kahler 模空间的平坦坐标。多面体 ∇_5 中的每个顶点 $\tilde{v}_i^*$ 对应一个环除子 D_i。遍历任意两个环除子的交 $D_\mathrm{i} \cap D_\mathrm{j}$，构造同调群 $H_4(W_4)$ 的基。这里挑选出对应于预势与超势的群元：

$$
\gamma_1 = D_1 \cap D_{10}, \gamma_2 = D_7 \cap D_8, \gamma_3 = D_8 \cap D_9, \tag{21}
$$

为分离开闭弦模参数，做如下变量代换：

$$
t_1 = k_1 + 3(k_3 + k_4), t_2 = k_2, \hat{t}_1 = k_3 + k_4, \hat{t}_2 = k_4. \tag{22}
$$

那么对应于 γ_1, γ_2 和 γ_3 的周期积分的领头项如下：

$$
\widetilde{\Pi}^*_{2,1} = t_1{}^2, \widetilde{\Pi}^*_{2,2} = 3(t_1 - \hat{t}_1)^2 + 3(t_1 - \hat{t}_1)t_2,
$$

$$
\widetilde{\Pi}^*_{2,3} = 3(t_1 - \hat{t}_2)^2 + 3(t_1 - \hat{t}_2)t_2. \tag{23}
$$

其中 $\widetilde{\Pi}^*_{2,1}$ 仅依赖于闭弦模，对应于体势能(bulk potential)函数 $F_t(t)$。而 $\widetilde{\Pi}^*_{2,2}, \widetilde{\Pi}^*_{2,3}$ 则即依赖开弦模也依赖闭弦模，即 D 模超势的领头项。

下面从 GKZ 系统的解中挑选出领头项与 $\widetilde{\Pi}^*_{2,1}, \widetilde{\Pi}^*_{2,2}$ 和 $\widetilde{\Pi}^*_{2,3}$ 匹配的解，得到完整的体势能与超势。使用代数坐标：

$$
z_1 = \frac{a_3 a_4 a_6 b_1^3}{a_0^3 b_0^3}, z_2 = \frac{a_1 a_2}{a_6^2}, z_3 = \frac{b_0 b_2}{b_1^2}, z_4 = \frac{a_5 b_1}{a_0 b_2}. \tag{24}
$$

由公式(10)可得基本周期与对数周期：

$$
\Pi_0(z) = w_0(z;0), \Pi_{1,i}(z) = \partial_{\rho_i} w_0(z;\rho)\mid_{\rho_i=0},
$$

$$
\Pi_{2,n}(z) = \sum_{i,j} K_{i,j;n} \partial_{\rho_i} \partial_{\rho_j} w_0(z;\rho)\mid_{\rho=0}. \tag{25}
$$

平坦坐标有

$$
k_i = \frac{\Pi_{1,i}(z)}{\Pi_0(z)} = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \log z_i + \cdots, \tag{26}
$$

令 $q_i = \exp(2\pi \mathrm{i} k_i)$，$i = 1,2,3,4$，则开闭混合镜像逆映射为：

$$
\begin{aligned}
z_1 &= q_1 + 7q_1q_2 + 21q_1q_2^2 + q_1q_3 + 7q_1q_2q_3 + 21q_1q_2^2q_3 - 2q_1q_3q_4 + 6q_1^2q_3q_4 - 14q_1q_2q_3q_4 + \cdots, \\
z_2 &= q_2 - 2q_2^2 - 2q_1q_2q_3q_4 + 36q_1q_2^2q_3q_4 + 5q_1^2q_2q_3^2q_4^2 - 140q_1^2q_2^2q_3^2q_4^2 + \cdots, \\
z_3 &= q_3 - 2q_3^2 - q_3q_4 + 5q_3^2q_4 - 3q_3^2q_4^2 + \cdots, \\
z_4 &= q_4 + q_3q_4 + q_4^2 + q_3^2q_4^2 + \cdots.
\end{aligned} \tag{27}
$$

由领头项(23)，得到 A 模型中的闭弦周期与 D 膜超势如下：

$$
\begin{aligned}
F_t(t) &= t_1^2 + \frac{1}{4\pi^2}\left(2q_2 + 2496q_1q_2 + \frac{q_2^2}{2} + \frac{2q_2^3}{9} + \frac{q_2^4}{8} + \cdots\right), \\
W_1(t,\hat{t}_1) &= 3(t_1 - \hat{t}_1)^2 - 3(t_1 - \hat{t}_1)t_2 + \frac{1}{4\pi^2}(3744q_1 + 3744q_1q_2 - 2538q_1\hat{q}_1^{-1} - 2538q_1q_2\hat{q}_1^{-1} + 108\hat{q}_1 + 2538q_1\hat{q}_1 + 2538q_1q_2\hat{q}_1 + 27\hat{q}_1^2 + \cdots), \\
W_2(t,\hat{t}_2) &= 3(t_1 - \hat{t}_2)^2 - 3(t_1 - \hat{t}_2)t_2 + \frac{1}{4\pi^2}(3744q_1 + 3744q_1q_2 - 2538q_1\hat{q}_2^{-1} - 2538q_1q_2\hat{q}_2^{-1} + 108\hat{q}_2 + 2538q_1\hat{q}_2 + 2538q_1q_2\hat{q}_2 + 27\hat{q}_2^2 + \cdots).
\end{aligned} \tag{28}
$$

式中：$q_i = \exp(2\pi \mathrm{i} t_i)$，$\hat{q}_i = \exp(2\pi i \hat{t}_i)\{i = 1,2\}$。闭弦周期 $F_t(t)$ 仅依赖于闭弦模参数 t_1 和 t_2。而 D 膜超势 $W_1(t,\hat{t}_1)$ 与 $W_2(t,\hat{t}_2)$ 则同时依赖于开闭弦模参数，并在交换开弦模参数 $\hat{t}_1$ 与 $\hat{t}_2$ 得到相同的超势的意义下，表现出 Z_2 对称性。这与相互平行的两张 D 膜存在的位置上的 Z_2 对称性相符。

表 1 列出从平行相 D 膜超势 $W_1(t,\hat{t}_1)$ 中提取出的 U(1) Ooguri-Vafa 不变量。

3.2 重合 D 膜相

根据扩展多面体 ∇_5，在 B 模型一侧的对偶四流形 M_4 的定义多项式

$$
\begin{aligned}
\tilde{P} &= a_1x_1^{12}x_6^6 + a_2x_2^{12}x_7^6 + a_3x_3^6x_8^3 + a_4x_4^6x_9^3 + a_5x_5^2x_6x_7x_8x_9x_{10}^2 + a_6x_1^6x_2^6x_6^3x_7^3 + a_7x_1^2x_2^2x_3^2x_4^2x_5^2 + a_8x_5^3x_1x_2x_3x_4x_{10} + a_9x_5^4x_{10}^2 + \\
&\quad a_{10}x_6^2x_7^2x_8^2x_9^2x_{10}^2 + a_0x_1x_2x_3x_4x_5x_6x_7x_8x_9x_{10}.
\end{aligned} \tag{29}
$$

表 1　$P(1,1,2,2,6)$ 中平行 D 膜超势 $W_1(t,\hat{t}_1)$ 的 $U(1)$ Ooguri-Vafa 不变量 $\{N_{n_1,n_2,n_3,n_4}\}$

Table 1　The $U(1)$ Ooguri-Vafa invariants $\{N_{n_1,n_2,n_3,n_4}\}$ for the superpotential $W_1(t,\hat{t}_1)$ of parallel D-branes on the $P(1,1,2,2,6)$

$n_1=0,n_2\backslash n_3=n_4$	0	1	2	3	4
0	0	108	0	0	0
1	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0
$n_1=1,n_2\backslash n_3=n_4$	0	1	2	3	4
0	−90	756	−2 538	3 744	2 538
1	−90	756	−2 538	3 744	2 538
2	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0
$n_1=2,n_2\backslash n_3=n_4$	0	1	2	3	4
0	414	−5 292	30 078	−99 360	220 806
1	2322	−32 616	210 384	−806 328	2 135 106
2	414	−5 292	30 078	−99 360	220 806
3	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0
$n_1=3,n_2\backslash n_3=n_4$	0	1	2	3	4
0	−3 078	58 752	−497 502	2 502 900	−8 444 034
1	−49 752	979 992	−8 990 406	50 786 136	−198 891 234
2	−49 752	979 992	−8 990 406	50 786 136	−198 891 234
3	−3 078	58 752	−497 502	2 502 900	−8 444 034
4	0	0	0	0	0

为简化符号，仍使用 a_i 计为定义多项式的系数。与上一子节中 D 膜几何定义多项式中的系数关系如下：

$$a_i = \begin{cases} a_i & 0 \leqslant i \leqslant 6, \\ b_{i-6} & 7 \leqslant i \leqslant 9, \\ c & i = 10. \end{cases} \tag{30}$$

当 $b_1^2 = 4b_0b_2$ 时，D 膜的定义方程变为 $Q \sim (\phi a_0 x_2x_3x_4x_5 + a_5x_5^2)^2$. 这意味着两张平行 D 膜的位置参数相等 $\phi_1 = \phi_2 = \phi$，即 D 膜重合。此时多项式 $\tilde{P}$ 中出现完全平方项 $(x_1x_2x_3x_4x_5 \pm x_5^2x_{10})^2$，对应的在四流形 M_4 上产生奇点。在 A 模型一侧，D 膜重合对应着例外除子的吹落(blow down)并在 W_4 上产生曲线奇异性。

注意到点 $\tilde{v}_7^*,\tilde{v}_8^*,\tilde{v}_9^*$ 位于同一条一维棱上，我们通过将点 $\tilde{v}_8^*$ 抹去来恢复 D 膜重合时产生的奇异性。则重合 D 膜相区对应的荷矢量为：

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} & & & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 9 & c & & \\ l^1 & = & (& -6 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 2 & -3 & 3 & 0 &) & \\ l^2 & = & (& 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 &) & . \\ l^3 & = & (& -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & -1 & 0 &) & \\ l^4 & = & (& 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 1 &) & \end{array} \tag{31}$$

与平行相区类似，遍历任意两个环除子的交 $D_{\mathrm{i}} \cap D_{\mathrm{j}}$，构造同调群 $H_4(W_4)$ 的基，并挑选出对应于预势与超势的群元：

$$\gamma_1 = D_1 \cap D_9, \gamma_2 = D_2 \cap D_8. \tag{32}$$

通过坐标变换

$$t_1 = k_1 + 3k_3, t_2 = k_2, \hat{t} = k_3 \tag{33}$$

分离开闭弦模参数，则对应于 γ_1 与 $2\gamma_2$ 的周期积分领头项为

$$\widetilde{\Pi}_{2,1}^* = t_1^2, \widetilde{\Pi}_{2,2}^* = 3(t_1 - \hat{t})^2 + 3(t_1 - \hat{t})t_2. \tag{34}$$

注意到 $\widetilde{\Pi}_{2,1}^*$ 只依赖于闭弦模参数 t_1，即为闭弦周期的领头项，而 $\widetilde{\Pi}_{2,2}^*$ 则同时依赖于开闭弦模参数，即为我们感兴趣的重合 D 膜超势的领头项。

使用代数坐标：

$$z_1 = \frac{a_3^2 a_4^2 a_6^2 a_9^3}{a_0^6 a_7^3}, z_2 = \frac{a_1 a_2}{a_6^2}, z_3 = \frac{a_5^2 a_7}{a_0^2 a_9}. \quad (35)$$

由公式(10)得到基本周期与对数周期如下：

$$\Pi_0(z) = w_0(z;0), \Pi_{1,i}(z) = \partial_{\rho_i} w_0(z;\rho) \mid_{\rho_i = 0},$$

$$\Pi_{2,n}(z) = \sum_{i,j} K_{i,j;n} \partial_{\rho_i} \partial_{\rho_j} w_0(z;\rho) \mid_{\rho = 0}. \quad (36)$$

平坦坐标有

$$k_i = \frac{\Pi_{1,i}(z)}{\Pi_0(z)} = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \log z_i + \cdots. \quad (37)$$

令 $q_i = \exp(2\pi \mathrm{i} k_i), i = 1,2,3$，则开闭混合镜像逆映射为：

$$z_1 = q_1 + 90q_1^2 + 2q_1q_2 + 540q_1^2q_2 + q_1q_2^2 - 3q_1q_3 - 4230q_1^2q_3 - 6q_1q_2q_3 + 3q_1q_3^2 + \cdots,$$

$$z_2 = q_2 - 2q_2^2 + 3q_2^3 - 4q_2^4 + 166320q_1q_2^2q_3^3 - 166320q_1q_2^3q_3^3 + \cdots,$$

$$z_3 = q_3 - 30q_1q_3 + 3525q_1^2q_3 - 120q_1q_2q_3 + q_3^2 + 1290q_1q_3^2 + \cdots. \quad (38)$$

由领头项(34)，得到 A 模型中的闭弦周期与 D 膜超势如下：

$$F_t(t) = t_1^2 + \frac{1}{4\pi^2}(2214144q_1 + 8q_2 + 22366944q_1q_2 + 2q_2^2 - 1368144q_1q_2^2 + \frac{8q_2^3}{9} + 7326624q_1q_2^3 + \frac{q_2^4}{2} - 1351896q_1q_2^4 + \cdots),$$

$$W_c(t,\hat{t}) = 3(t_1 - \hat{t})^2 - 18(t_1 - \hat{t})t_2 + 27t_2^2 + \frac{1}{4\pi^2}(\frac{89727696q_1}{5} + 12q_2 + \frac{389037924q_1q_2}{5} + 3q_2^2 - 2532276q_1\hat{q}^{-1} - 10903464q_1q_2\hat{q}^{-1} + 216\hat{q} + \frac{394081848q_1\hat{q}}{7} + 63\hat{q}^2 + \cdots). \quad (39)$$

式中：$q_i = \exp(2\pi \mathrm{i} t_i), \hat{q} = \exp(2\pi \mathrm{i}\hat{t})\{i = 1,2\}$。闭弦周期 $F_t(t)$ 仅依赖于闭弦模参数 t_1 和 t_2。而 D 膜超势 $W_c(t,\hat{t})$ 则同时依赖于开闭弦模参数，表 2 列出从重合 D 膜超势 $W_c(t,\hat{t})$ 中提取出的 U(2) Ooguri-Vafa 不变量。

表 2 $P(1,1,2,2,6)$ 中重合 D 膜超势 $W_c(t,\hat{t})$ 的 $U(2)$ Ooguri-Vafa 不变量 $\{N_{n_1,n_2,n_3}\}$

Table 2 The $U(2)$ Ooguri-Vafa invariants $\{N_{n_1,n_2,n_3}\}$ for the superpotential $W_c(t,\hat{t})$ of coincident D-branes on the $P(1,1,2,2,6)$

$n_1=0, n_2 \backslash n_3$	0	1	2	3	4
0	0	216	9	36/5	117/35
1	12	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0
$n_1=1, n_2 \backslash n_3$	0	1	2	3	4
0	−3 348	170 910	−2 532 276	89 727 696/5	394 081 848/7
1	−14 472	732 240	−10 903 464	389 037 924/5	1 633 957 272/7
2	−4 968	243 810	−3 693 816	71 953 326/5	464 809 428/7
3	0	0	0	8 189 352	0
4	0	0	0	−97 083	0
$n_1=2, n_2 \backslash n_3$	0	1	2	3	4
0	475 902	−74 368 368	2 145 346 020	−32 662 588 500	2658555788292/7
1	9 693 000	−1 341 934 128	39 364 805 520	−598 483 399 680	45 342 343 984 824/7
2	414	−5292	30078	−99360	220806
3	23 368 068	−3 211 210 008	93 999 954 060	−1 427 242 984 560	107 934 649 634 916/7
4	11 881 800	−1 617 528 528	47 142 598 320	−715 850 841 600	4 770 486 095 562/7
$n_1=3, n_2 \backslash n_3$	0	1	2	3	4
0	−606 532 212/5	206725740408/5	−10561116492612/5	252235104726006/5	−27677073447524736/35
1	−30 606 305 112/5	8732757430368/5	−451295788803552/5	11083486520689776/5	−1217662170543665496/35
2	−42 519 459 060	11 653 973 149 320	−602 863 030 313 460	14 880 114 395 505 900	−1 633 807 099 939 708 620/7
3	−80 315 447 832	21 853 797 373 440	−1 128 740 102 713 440	27 842 988 341 756 880	−3 054 042 321 024 346 560/7
4	−48 803 336 460	13 260 576 931 920	−683 089 098 471 360	16 819 047 974 336 400	−1 846 575 308 296 356 480/7

4 总结

本文就双 D 膜在紧化空间 $P(1,1,2,2,6)$ 上为例,用环簇的语言具体地构造了对应于平行 D 膜相与重合 D 膜相的对偶四流形。利用类型 II 弦理论/F 理论对偶得到了平行与重合时 D 膜贡献的超势,并分别提取对应的 Ooguri-Vafa 不变量。

两张处于不同位置的平行 D 膜间存在的离散 Z_2 对称群被解释为非微扰的 $U(2)$ 规范理论的外尔对称性,而该 D 膜系统的平行相也对应于 $U(2)$ 规范理论的库伦分支。平行相区中的计算正如我们所预期的,由两张平行 D 膜分别贡献的超势在瞬子展开下也展现出了同样的外尔对称性。而在重合相区,D 膜系统由平行 D 膜相相变为重合 D 膜相,开闭混合模空间中的形变参数自由度减少,原本相互独立的两个开弦参数约化为一个。D 膜世界叶上的规范群也由原来的 $U(1)\times U(1)$ 提升为 $U(2)$。

另外从平行、重合相区分别得到不同的 Ooguri-Vafa 不变量。即这两个相区对应着不同的 BPS 态能谱,这可以作为相变发生的一个证据。

参考文献

[1] Lerche W, Mayr P, Warner N. Holomorphic N = 1 special geometry of open-closed type-II strings[EB/OL]. (2002-08-07)[2018-04-15]. https://arxiv.org/abs/hep-th/0207259.

[2] Lerche W, Mayr P, Warner N. N=1 special geometry, mixed Hodge variations and toric geometry[EB/OL]. (2002-08-06)[2018-04-15]. https://arxiv.org/abs/hep-th/0208039.

[3] Mayr P. N=1 mirror symmetry and open/closed string duality[J]. Advances in Theoretical and Mathematical Physics, 2002, 5: 213-242.

[4] Alim M, Hecht M, Jockers H, et al. Hints for off-shell mirror symmetry in type II/F-theory compactifications[EB/OL]. (2010-09-23)[2018-04-15]. https://arxiv.org/abs/0909.1842.

[5] Gukov S, Vafa C, Witten E. CFT's from Calabi-Yau four-folds[J]. Nuclear Physics B, 2000, 584: 69-108.

[6] Jockers H, Mayr P, Walcher J. On N = 1 4d effective couplings for F-theory and heterotic Vacua[J]. Advances in Theoretical and Mathematical Physics, 2010, 14: 1 433-1 514.

[7] Jockers H, Soroush M. Effective superpotentials for compact D5-brane Calabi-Yau geometries[J]. Communications in Mathematical Physics, 2009, 290: 249-290.

[8] Xu F J, Yang F Z. Ooguri-Vafa invariants and off-shell superpotentials of Type-II/F-theory compactification[J]. Chinese Physics C, 2014, 38(3): 33 103.

[9] Xu F J, Yang F Z. Type II/F-theory superpotentials and Ooguri-Vafa invariants of compact Calabi-Yau threefolds with three deformations[J]. Modern Physics Letters A, 2014, 29: 1 450 062.

[10] Cheng S, Xu F J, Yang F Z. Off-shell D-brane/F-theory effective superpotentials and Ooguri-Vafa invariants of several compact Calabi-Yau manifolds[J]. Modern Physics Letters A, 2014, 29: 1 450 061.

[11] Zhang S S, Yang F Z. Mirror Symmetry, D-brane superpotential and Ooguri-Vafa invariants of compact Calabi-Yau manifolds[J]. Chinese Physics C, 2015, 39(12): 121 002.

[12] Zou H, Yang F Z. Effective superpotentials of type II D-brane/F-theory on compact complete intersection Calabi-Yau threefolds[J]. Modern Physiscs Letters A, 2016, 31: 1 650 094.

[13] Alim M, Hecht M, Mayr P, et al. Mirror symmetry for toric Branes on compact hypersurfaces[J]. Journal of High Energy Physics, 2009(9):126. doi:10.1088/1126-6708/2009/09/126.

[14] Batyrev V V. Dual polyhedra and mirror symmetry for Calabi-Yau hypersurfaces in toric varieties[J]. Journal of Algebraic Geometry, 1994, 3: 493-545.

[15] Hosomo S, Klemm A, Theisen S, et al. Mirror symmetry, mirror map and applications to complete intersection Calabi-Yau spaces[J]. Nuclear Physics B, 1995, 433: 501-554.

[16] Hosomo S, Klemm A, Theisen S, et al. Mirror symmetry, mirror map and applications to Calabi-Yau hypersurfaces[J]. Communications in Mathematical Physics, 1995, 167: 301-350.

[17] Hosono S, Lian B H, Yau S T. GKZ-generalized hypergeometric systems in mirror symmetry of Calabi-Yau hypersurfaces[J]. Communications in Mathematical Physics, 1996, 182: 535-557.

[18] Fulton W. Introduction to toric varieties[M]. Princeton: Princeton University Press, 1993.

[19] Bershadsky M, Vafa C. D-strings on D-manifolds[J]. Nuclear Physics B, 1996, 463: 398-414.

[20] Fujino O, Sato H. Introduction to the toric Mori theory[EB/OL]. (2004-04-04)[2018-04-15]. https://arxiv.org/abs/math/0307180.

[21] Fujino O. Notes on toric varieties from Mori theoretic viewpoint[EB/OL]. (2001-12-10)[2018-04-15]. https://arxiv.org/abs/math/0112090v1.

[22] Scaramuzza A. Smooth complete toric varieties: an algorithmic approach[D]. Rome: University of Roma Tre, 2007.

[23] Renesse C V. Combinatiorial aspects of toric varieties[D]. University of Massachusetts Amherst, 2007.

[24] Witten E. Phases of N = 2 theories in two-dimensions[J]. Nuclear Physics B, 1993, 403: 159-222.