文章编号:2095-6134(2020)01-0006-07

非零 Gauss 曲率 Bonnet 曲面的存在性及其相关性质*

王珂,吴英毅†

(中国科学院大学数学科学学院, 北京 100049)

(2018 年 9 月 12 日收稿; 2018 年 12 月 30 日收修改稿)

Wang K, Wu Y Y. Existence and related properties of non-zero Gaussian curvature Bonnet surfaces[J]. Journal of University of Chinese Academy of Sciences, 2020,37(1):6-12.

摘　要　研究关于 Bonnet 曲面的两个问题。第一,通过研究 Bonnet 曲面的平均曲率所满足的常微分方程证明 Gauss 曲率不恒为零的 Bonnet 曲面一定存在。第二,证明若两张 Bonnet 曲面之间存在一个保主曲率且保定向的共形映射,则有以下两种情形:如果两曲面的 Gauss 曲率零点孤立,则该共形映射必为等距; 如果两曲面的 Gauss 曲率恒为零,则该共形映射为相似变换。

关键词　Bonnet 曲面;W-曲面;共形映射;相似变换

中图分类号:O186.1　　**文献标志码**:A　　**doi**:10.7523/j.issn.2095-6134.2020.01.002

Existence and related properties of non-zero Gaussian curvature Bonnet surfaces

WANG Ke, WU Yingyi

(*School of Mathematical Sciences, University of Chinese Academy of Sciences, Beijing* 100049, *China*)

Abstract　We study two problems about Bonnet surfaces. First, we prove that the Bonnet surface whose Gaussian curvature is not identically zero must exist by studying the ordinary differential equation which the mean curvature of the Bonnet surface satisfies. Secondly, we prove that if there exists a conformal map which preserves the principal curvatures and the orientation between two Bonnet surfaces, then there are two cases as follows: 1) If the zero points of the Gaussian curvature of the two surfaces are isolated, then the conformal map must be an isometry. 2) If the Gaussian curvature of the two surfaces is identically zero, then the conformal map is a similarity transformation.

Keywords　Bonnet surface; W-surface; conformal map; similarity transformation

Bonnet 曲面是指三维欧氏空间 E^3 中一张可定向曲面,并且上面存在一个保主曲率且保定向的非平凡(即不是 E^3 中的刚体运动在曲面上的限制)单参数等距变换族。Bonnet 曲面的概念最初由 Bonnet[1] 提出,他证明 E^3 中的常平均曲率曲面一定是 Bonnet 曲面。Bonnet 之后,一直有数学家对 Bonnet 曲面进行研究,比如:Graustein,Hazzidakis,Cartan 等。近二三十年,Bonnet 曲面的研究取得了

* 国家自然科学基金(11471308)资助

† 通信作者,E-mail:wuyy@ucas.ac.cn

很大进展。Chern[2] 利用活动标架法,给出非常平均曲率 Bonnet 曲面满足的充要条件,并利用该条件得到非常平均曲率 Bonnet 曲面的一些重要性质,包括非常平均曲率 Bonnet 曲面一定是 W-曲面,即满足 $dH \wedge dK = 0$ 的曲面。Colares 和 Kenmotsu[3] 系统地研究 Gauss 曲率为零的非常平均曲率 Bonnet 曲面,并且给出分类和等距族。Chen 和 Peng[4] 在文献[2]的基础上进一步得到非常平均曲率 Bonnet 曲面的一些重要性质,并最终得到非常平均曲率 Bonnet 曲面的分类,以及非常平均曲率 Bonnet 曲面的平均曲率满足的常微分方程,这个方程与 Hazzidakis 在文献[5]中的结果等价。Peng 与 Lu[6] 研究文献[4]中前两类 Bonnet 曲面的极限曲面。Bobenko 和 Eitner[7] 用可积系统的方法,得到非常平均曲率 Bonnet 曲面平均曲率与 Painlevé 方程解之间的关系,并利用 Painlevé 方程的解表示出非常平均曲率 Bonnet 曲面的平均曲率。在文献[8]中,Chen 和 Li 得到在空间形式 $\mathbb{R}^3(c)$ 中的 Bonnet 曲面和在 $\mathbb{R}^3_1(c)$ 中类空 Bonnet 曲面的分类定理。

为方便叙述,下文中讨论的 Bonnet 曲面都是指非常平均曲率 Bonnet 曲面并且曲面上没有脐点,又假设在该曲面上 $dH \neq 0$,并且文中提到的等距皆为保定向的等距。

在文献[4]中,作者提出一个问题,是否存在 Gauss 曲率不恒为 0 的 Bonnet 曲面。在本文中,通过研究 Bonnet 曲面平均曲率满足的微分方程,得到上述问题的肯定回答,即

定理 A　存在 Gauss 曲率不恒为 0 的 Bonnet 曲面。

此外,利用文献[2,4,6]中的结果,又得到

定理 B　如果两张 Bonnet 曲面之间存在一个保主曲率且保定向的共形映射,若两 Bonnet 曲面的 Gauss 曲率零点孤立,则该共形映射为等距;若两 Bonnet 曲面的 Gauss 曲率恒为 0,则该共形映射为相似变换。

1　预备知识

设 S 是 E^3 中一张局部浸入曲面,并且没有脐点。于是 S 上存在一个主方向标架场 $\{p, e_1, e_2, e_3\}$,其中 $p \in S$ 为位置向量,e_1, e_2 为曲面的单位主方向,e_3 为单位法向量。记曲面的主曲率为 a、c $(a > c)$,高斯曲率为 K,即 $K = ac$,平均曲率为 H,即 $H = \frac{a+c}{2}$,又令 $G = \frac{a-c}{2}$,则 $G > 0$ 且 $G = \sqrt{H^2 - K}$。

对于 S,首先有标架运动方程:

$$\begin{cases} dp = \omega_1 e_1 + \omega_2 e_2 \\ de_1 = \omega_{12} e_2 + \omega_{13} e_3 \\ de_2 = -\omega_{12} e_1 + \omega_{23} e_3 \\ de_3 = -\omega_{13} e_1 - \omega_{23} e_2 \end{cases},$$

式中:ω_1, ω_2 为 e_1, e_2 的对偶 1-形式,则 $\omega_{13} = a\omega_1$,$\omega_{23} = c\omega_2$,ω_{12} 为曲面的联络形式,设 $\omega_{12} = \tilde{h}\omega_1 + \tilde{k}\omega_2$。这些 1-形式满足结构方程:

$$\begin{cases} d\omega_1 = \omega_{12} \wedge \omega_2 \\ d\omega_2 = \omega_1 \wedge \omega_{12} \\ d\omega_{12} = -K\omega_1 \wedge \omega_2 (\text{Gauss 方程}) \\ d\omega_{13} = \omega_{12} \wedge \omega_{23} (\text{Codazzi 方程}) \\ d\omega_{23} = \omega_{13} \wedge \omega_{12} (\text{Codazzi 方程}) \end{cases}.$$

由 Codazzi 方程,

$$[da - (a-c)\tilde{h}\omega_2] \wedge \omega_1 = 0,$$

$$[dc - (a-c)\tilde{k}\omega_1] \wedge \omega_2 = 0.$$

于是令

$$2dH = (a-c)(A\omega_1 + B\omega_2), \tag{1}$$

则 $\frac{da}{a-c} = (A - \tilde{k})\omega_1 + \tilde{h}\omega_2$,

$$\frac{dc}{a-c} = \tilde{k}\omega_1 + (B - \tilde{h})\omega_2,$$

因此,

$$d\log(a-c) = (A - 2\tilde{k})\omega_1 - (B - 2\tilde{h})\omega_2, \tag{2}$$

并且 $|\nabla H|^2 = (H^2 - K)(A^2 + B^2)$。定义新的 1-形式:

$$\theta_1 = A\omega_1 + B\omega_2, \theta_2 = -B\omega_1 + A\omega_2,$$

$$\alpha_1 = A\omega_1 - B\omega_2, \alpha_2 = B\omega_1 + A\omega_2.$$

再定义曲面上的 $*$ 算子,

$$*\omega_1 = \omega_2, *\omega_2 = -\omega_1.$$

于是有

$$*\theta_1 = \theta_2, *\theta_2 = -\theta_1,$$

$$*\alpha_1 = \alpha_2, *\alpha_2 = -\alpha_1.$$

(1)和(2)可以写成

$$2dH = (a-c)\theta_1,$$

$$d\log(a-c) = \alpha_1 + 2*\omega_{12}.$$

如果 $dH \neq 0$,可定义新的度量:

$$ds_{-1}^2 = \theta_1^2 + \theta_2^2 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 = \frac{|\nabla H|^2}{H^2 - K} ds^2, \tag{3}$$

其中 ds^2 是 S 上的诱导度量。

Chern 在文献[2]中证明曲面 S 为 Bonnet 曲面的充要条件为

$$\begin{cases} d\alpha_1 = 0 \\ d\alpha_2 = \alpha_1 \wedge \alpha_2 \end{cases}. \tag{4}$$

由(4)可知如果 S 为 Bonnet 曲面则 ds_{-1}^2 的 Gauss 曲率为 -1。在文献[2]中,作者还得到 Bonnet 曲面必为 W-曲面,即满足 $dH \wedge dK = 0$,或者等价地,K 为 H 的函数。在文献[4]中,Chen 和 Peng 证明 Bonnet 曲面不仅满足(4)还满足 $d\theta_1 = 0$,并进一步得到文献[4]中的定理。

定理 1.1 设 S 为 Bonnet 曲面,定义度量

$$ds_0^2 = \frac{(H^2 - K)^2}{|\nabla H|^2} ds^2, \tag{5}$$

则1) ds_0^2 的 Gauss 曲率为 0,

2) $|\nabla H|$ 和 ΔH 都是 H 的函数。

由定理 1.1 可得[4],存在 Bonnet 曲面 S 上的等温坐标 (u,v),使得 $ds_0^2 = du^2 + dv^2$,$du \wedge dv$ 与 $\omega_1 \wedge \omega_2$ 给定相同定向并且 H 只是 u 的函数。由 $dH \neq 0$,可设 $H'(u) > 0$。结合(3)和(5),可设

$$ds_{-1}^2 = F^2 ds_0^2,$$

则 $F^2 = \frac{|\nabla H|^4}{(H^2 - K)^3}$。设 $F > 0$,则 $F = \frac{|\nabla H|^2}{G^3}$,经过简单计算可知 $H' = \frac{|\nabla H|^2}{G^2}$,因此,$F = \frac{H'}{G}$。并且在这个等温坐标下,曲面的第一基本型可写成

$$ds^2 = e^{2\rho}(du^2 + dv^2), \tag{6}$$

其中 $e^{2\rho} = \frac{|\nabla H|^2}{(H^2 - K)^2} = \frac{F^2}{H'}$。令 $\tilde{\omega}_1 = e^{\rho} du$,$\tilde{\omega}_2 = e^{\rho} dv$,设 $\tilde{\omega}_{12}$ 为关于 $\{\tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2\}$ 的联络 1-形式,则 $\tilde{\omega}_{12} = \rho'(u) dv$。设

$$\begin{cases} \tilde{\omega}_1 = \cos\theta\omega_1 - \sin\theta\omega_2 \\ \tilde{\omega}_2 = \sin\theta\omega_1 + \cos\theta\omega_2 \end{cases},$$

这里 $\{\omega_1,\omega_2\}$ 为主方向标架。又设 $\{\tilde{e}_1, \tilde{e}_2\}$ 为 $\{\tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2\}$ 的对偶标架,则 $\{p, \tilde{e}_1, \tilde{e}_2, e_3\}$ 为 S 上新的标架。令

$$\begin{cases} \tilde{\omega}_{13} = \langle d\tilde{e}_1, e_3 \rangle \\ \tilde{\omega}_{23} = \langle d\tilde{e}_2, e_3 \rangle \end{cases},$$

设

$$\begin{cases} \tilde{\omega}_{13} = h_{11}\tilde{\omega}_1 + h_{12}\tilde{\omega}_2 \\ \tilde{\omega}_{23} = h_{21}\tilde{\omega}_1 + h_{22}\tilde{\omega}_2 \end{cases}, \tag{7}$$

则

$$\begin{cases} h_{11} = H + G\cos 2\theta \\ h_{12} = h_{21} = G\sin 2\theta \\ h_{22} = H - G\cos 2\theta \end{cases}. \tag{8}$$

将(7)和(8)代入到关于 $\{\tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2, \tilde{\omega}_{12}, \tilde{\omega}_{13}, \tilde{\omega}_{23}\}$ 的 Codazzi 方程中,可得

$$\begin{cases} 2\theta_u = -F\sin 2\theta \\ 2\theta_v = F\cos 2\theta - (\ln F)' \end{cases}. \tag{9}$$

(9)的可积性条件为 F 满足

$$(\ln F)'' = F^2. \tag{10}$$

解(10),得到

$$F = \pm \begin{cases} \dfrac{1}{u+t} \\ \dfrac{\lambda}{\sin(\lambda(u+t))} \\ \dfrac{\lambda}{\sinh(\lambda(u+t))} \end{cases}, \tag{11}$$

这里的 $t,\lambda(\lambda > 0)$ 是常数。将(11)代入(9)中,解出 θ 有

$$\tan\theta = \pm \begin{cases} \left(\dfrac{v+s}{u+t}\right)^{\pm 1}, \text{当 } F = \pm\dfrac{1}{u+t}, \\ \tanh\dfrac{\lambda v + s}{2}\left(\cot\dfrac{\lambda(u+t)}{2}\right)^{\pm 1} \\ \text{或 } \coth\dfrac{\lambda v + s}{2}\left(\cot\dfrac{\lambda(u+t)}{2}\right)^{\pm 1}, \\ \quad \text{当 } F = \pm\dfrac{\lambda}{\sin(\lambda(u+t))}, \\ \pm\tan\dfrac{\lambda v + s}{2}\left(\coth\dfrac{\lambda(u+t)}{2}\right)^{\pm 1}, \\ \quad \text{当 } F = \pm\dfrac{\lambda}{\sinh(\lambda(u+t))}, \end{cases} \tag{12}$$

这里的 s 是常数;或者

$$\tan\theta = \begin{cases} 0, & \text{当 } F = -\dfrac{1}{u+t}, \\ \pm\cot\dfrac{\lambda(u+t)}{2}, & \text{当 } F = \dfrac{\lambda}{\sin(\lambda(u+t))}, \\ \mp\tan\dfrac{\lambda(u+t)}{2}, & \text{当 } F = -\dfrac{\lambda}{\sin(\lambda(u+t))}, \end{cases} \tag{13}$$

或者

$$\theta = \frac{\pi}{2},\ 当\ F = \frac{1}{u+t}. \tag{14}$$

注意,(13)和(14)是在(12)中令 $s \to \pm\infty$ 的结果。再由(6), $K = -\rho'' e^{-2\rho}$ 得到

$$\left(\ln\frac{H'}{F^2}\right)''\frac{H'}{F^2} = 2\left(H^2 - \frac{H'^2}{F^2}\right), \tag{15}$$

这就是 Bonnet 曲面的平均曲率所满足的微分方程。反之,我们也可以利用(15)的解和(9)的解构造 Bonnet 曲面。设 H 为(15)的解,令 $\tilde{\omega}_1 = e^{\rho}du = \frac{F}{\sqrt{H'}}du$, $\tilde{\omega}_2 = e^{\rho}dv = \frac{F}{\sqrt{H'}}dv$, 则存在唯一一个 1-形式 $\tilde{\omega}_{12}$ 满足 $d\tilde{\omega}_1 = \tilde{\omega}_{12}\wedge\tilde{\omega}_2$, $d\tilde{\omega}_2 = \tilde{\omega}_1\wedge\tilde{\omega}_{12}$, 不难得到 $\tilde{\omega}_{12} = \rho' dv$。定义 $G = \frac{H'}{F}$, 令

$$\begin{cases} h_{11} = H + G\cos 2\theta \\ h_{12} = h_{21} = G\sin 2\theta, \\ h_{22} = H - G\cos 2\theta \end{cases}$$

这里 θ 为(9)的解,再令 $\tilde{\omega}_{13} = h_{11}\tilde{\omega}_1 + h_{12}\tilde{\omega}_2$, $\tilde{\omega}_{23} = h_{21}\tilde{\omega}_1 + h_{22}\tilde{\omega}_2$。由于 H 为(15)的解,可得

$$d\tilde{\omega}_{12} = -\tilde{\omega}_{13}\wedge\tilde{\omega}_{23}.$$

再由 θ 为(9)的解,可得

$$\begin{cases} d\tilde{\omega}_{13} = \tilde{\omega}_{12}\wedge\tilde{\omega}_{23} \\ d\tilde{\omega}_{23} = \tilde{\omega}_{13}\wedge\tilde{\omega}_{12} \end{cases}.$$

即 $\{\tilde{\omega}_{12}, \tilde{\omega}_{13}, \tilde{\omega}_{23}\}$ 满足 Gauss 方程和 Codazzi 方程。从而由曲面论基本定理,存在 E^3 中的曲面 S,以 $\mathrm{I} = (\tilde{\omega}_1)^2 + (\tilde{\omega}_2)^2$ 和 $\mathrm{II} = \tilde{\omega}_1\tilde{\omega}_{13} + \tilde{\omega}_2\tilde{\omega}_{23}$ 为其第一和第二基本型, 并且 S 的 Gauss 曲率 $K = H^2 - G^2$, 平均曲率为 H。进一步,由于 $H^2 - K = G^2 > 0$, S 上无脐点,并且 S 上两主曲率分别为 $H + G$ 和 $H - G$。然后对 $\tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2$ 旋转 θ 角,得到新标架

$$\begin{pmatrix}\omega_1\\ \omega_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tilde{\omega}_1\\ \tilde{\omega}_2\end{pmatrix},$$

经计算 $\omega_{13} = (H+G)\omega_1$, $\omega_{23} = (H-G)\omega_2$, 即 $\{\omega_1, \omega_2\}$ 为主方向标架。再设 $\frac{dH}{G} = A\omega_1 + B\omega_2$, 令 $\alpha_1 = A\omega_1 - B\omega_2$, $\alpha_2 = B\omega_1 + A\omega_2$。则 $A = \sqrt{H'}\cos\theta$, $B = -\sqrt{H'}\sin\theta$, 于是 $\alpha_1 = \sqrt{H'}\cos 2\theta\,\tilde{\omega}_1 + \sqrt{H'}\sin 2\theta\,\tilde{\omega}_2$, $\alpha_2 = -\sqrt{H'}\sin 2\theta\,\tilde{\omega}_1 + \sqrt{H'}\cos 2\theta\,\tilde{\omega}_2$。直接计算得 α_1、α_2 满足(4)。因此, S 为 Bonnet 曲面。综上,文献[4]中定理可改写为:

定理 1.2　设 S 是一个 Bonnet 曲面,则 S 上存在一个等温坐标 (u,v), 使得 S 的平均曲率 H 只是 u 的函数, $H' > 0$ 并且满足方程(15); 此时, S 的第一基本型 $I = \frac{F^2}{H'}(du^2 + dv^2)$。进一步,令 $\tilde{\omega}_1 = \frac{F}{\sqrt{H'}}du$, $\tilde{\omega}_2 = \frac{F}{\sqrt{H'}}dv$, 设 $\{\tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2\}$ 与主方向标架夹角为 θ, 则 θ 满足(9), 具体地, θ 满足(12)或(13)或(14)。

反之,设 H 为(15)的解, θ 为(9)的解,则存在 Bonnet 曲面 S, 使得平均曲率为 H, 第一基本型 $I = \frac{F^2}{H'}(du^2 + dv^2)$, 令 $\tilde{\omega}_1 = \frac{F}{\sqrt{H'}}du$, $\tilde{\omega}_2 = \frac{F}{\sqrt{H'}}dv$, 则 θ 为 $\{\tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2\}$ 与主方向标架的夹角。

2　定理 A 的证明

在这一节中,首先研究 Gauss 曲率恒为 0 的 Bonnet 曲面,得到命题 2.1,再对(15)降阶,得到命题 2.2, 最后对降阶后的方程用常微分方程解的存在性定理证明定理 A。

首先,得到

命题 2.1　设 S 为 Bonnet 曲面,若 S 的 Gauss 曲率 K 恒为 0,则在定理 1.2 中, $F = \pm\frac{1}{u+t}$, 此时 $H = -\frac{\beta}{u+t}$, 这里 β 为常数且 $\beta > 0$。

证明　若 Gauss 曲率 K 恒为 0,由定理 1.2, H 满足

$$\left(\ln\frac{H'}{F^2}\right)'' = 0, \tag{16}$$

且

$$H^2 = \left(\frac{H'}{F}\right)^2. \tag{17}$$

由(17), $H = \frac{H'}{F}$ 或者 $H = -\frac{H'}{F}$。由(16), $\frac{H'}{F^2} = \beta e^{\alpha u}$, 这里 β, α 为常数且 $\beta > 0$。于是 $H = \beta e^{\alpha u}F$ 或者 $H = -\beta e^{\alpha u}F$。

当 $H = \beta e^{\alpha u}F$ 时, $H' = \beta(\alpha e^{\alpha u}F + e^{\alpha u}F')$, 此

时, F 满足 $\alpha F+F'=F^2$, 即 $\alpha+(\ln F)'=F$, 因此, $(\ln F)''=F'$, 由(10),

$$F^2=F', \tag{18}$$

于是 $\alpha=0$。将 $F=\pm\frac{1}{u+t}, F=\pm\frac{\lambda}{\sin(\lambda(u+t))}$ 和 $F=\pm\frac{\lambda}{\sinh(\lambda(u+t))}$ 代入到(18)中, 得只有当 $F=-\frac{1}{u+t}$ 时, (18)成立, 并且此时 $H=-\frac{\beta}{u+t}$。

当 $H=-\beta e^{\alpha u}F$ 时, $H'=-\beta(\alpha e^{\alpha u}F+e^{\alpha u}F')$, 此时, F 满足 $\alpha F+F'=-F^2$, 得

$$F^2=-F', \tag{19}$$

于是 $\alpha=0$。类似地, 将 $F=\pm\frac{1}{u+t}, F=\pm\frac{\lambda}{\sin(\lambda(u+t))}$ 和 $F=\pm\frac{\lambda}{\sinh(\lambda(u+t))}$ 代入到(19)中,得只有当 $F=\frac{1}{u+t}$ 时,(19)成立,并且此时 $H=-\frac{\beta}{u+t}$。 □

然后,对(15)降阶得到

命题 2.2 若 H 是(15)的解则存在常数 C 使得 H 满足

$$\left(\ln\frac{H'}{F^2}\right)'^2=-4\left[\frac{H^2F^2}{H'}+H'-2H(\ln F)'\right]+C. \tag{20}$$

反之,如果存在常数 C 使得 H 满足(20)且 $\left(\frac{H'}{F^2}\right)'$ 不在某区间上恒为 0 则 H 满足(15)。

证明 令 $\ln\frac{H'}{F^2}=h, 2\left(H^2-\frac{H'^2}{F^2}\right)=f$ 则由(15)有 $h''e^h=f$,

即

$$h''=fe^{-h}. \tag{21}$$

在(21)两边同乘 $2h'$, 得 $2h'h''=2fe^{-h}h'$,

即

$$(h'^2)'=-2f(e^{-h})'. \tag{22}$$

对(22)两边积分一次得

$$(h')^2=-2\int f(e^{-h})'du+C, \tag{23}$$

其中 C 为常数。下面利用分部积分法计算积分 $\int f(e^{-h})'du$。

$$\begin{aligned}\int f(e^{-h})'du&=fe^{-h}-\int f'e^{-h}du\\&=fe^{-h}-2\int\frac{F^2}{H'}\left(H^2-\frac{H'^2}{F^2}\right)'du\\&=fe^{-h}-2\int\frac{F^2}{H'}\left(2HH'-2\frac{H'}{F}\left(\frac{H'}{F}\right)'\right)du\\&=fe^{-h}-4\int HF^2du+4\int F\left(\frac{H'}{F}\right)'du\\&=fe^{-h}-4\int HF^2du+4F\frac{H'}{F}-4\int F'\frac{H'}{F}du\\&=fe^{-h}-4\int HF^2du+4H'-4\int H'(\ln F)'du\\&=fe^{-h}-4\int HF^2du+4H'-4H(\ln F)'+\\&\quad 4\int H(\ln F)''du\\&=fe^{-h}-4\int HF^2du+4H'-4H(\ln F)'+\\&\quad 4\int HF^2du\\&=fe^{-h}+4H'-4H(\ln F)',\end{aligned}$$

即

$$\int f(e^{-h})'du=2\left(H^2-\frac{H'^2}{F^2}\right)\frac{F^2}{H'}+4H'-4H(\ln F)'. \tag{24}$$

将(24)代入(23)得(20)成立。

反之,如果存在常数 C 使得 H 满足(20),令 $\ln\frac{H'}{F^2}=h, 2(H^2-\frac{H'^2}{F^2})=f$, 则(21)成立。又由于 $\left(\frac{H'}{F^2}\right)'$ 不在某区间上恒为 0,即 h' 不在某区间上恒为 0,则(21)成立,即 H 满足(15)。 □

注:Hazzidakis 在文献[5]中得到一个与(15)等价的方程,因此,在文献[7]中,作者称文献[5]中的方程为 Hazzidakis 方程。在文献[5]中, Hazzidakis 也将得到的方程进行了降阶,但与(20)在形式上有较大差别。

下面,通过研究(20)的解证明定理 A。

定理 A 的证明 设 0 在 F 的定义域内,在 $\mathbb{R}^2$ 上取一点 $(x_0,y_0)(y_0>0)$ 以及取 $C\in\mathbb{R}$ 充分大使得

$$Cy_0^2-4\left[F^2(0)x_0^2y_0+y_0^3-2x_0y_0^2\frac{F'(0)}{F(0)}\right]>0.$$

于是存在 $\varepsilon>0$ 以及 (x_0,y_0) 的开邻域 U, 使得 $\forall(x,y)\in U, y>0$ 且 $\forall(u,x,y)\in(-\varepsilon,\varepsilon)\times U$,

$$Cy^2-4\left[F^2(u)x^2y+y^3-2xy^2\frac{F'(u)}{F(u)}\right]>0. \tag{25}$$

在 $(-\varepsilon,\varepsilon)\times U$ 上考虑方程组

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{du}=y\\ \dfrac{dy}{du}=2(\ln F)'y+\\ \quad\sqrt{Cy^2-4[F^2x^2y+y^3-2xy^2(\ln F)']}\\ x(0)=x_0\\ y(0)=y_0\end{cases}. \tag{26}$$

由(25),

$2(\ln F)'y+\sqrt{Cy^2-4[F^2x^2y+y^3-2xy^2(\ln F)']}$ 为 $(-\varepsilon,\varepsilon)\times U$ 上光滑函数。于是由常微分方程组解的存在唯一性,存在 $0<\delta\leqslant\varepsilon$ 满足在 $(-\delta,\delta)$ 上(26)存在唯一一组光滑解 $(x(u),y(u))$。下面证明 $x(u)$ 满足(15)。

首先,由 $(x(u),y(u))$ 为(26)的解,$\forall u\in(-\delta,\delta)$,$(x(u),y(u))\in U$,$x'=y>0$,且

$$x''=2(\ln F)'x'+\sqrt{Cx'^2-4[F^2x^2x'+x'^3-2xx'^2(\ln F)']}.$$

于是 $x(u)$ 满足

$$\left(\ln\frac{x'}{F^2}\right)'=\sqrt{C-4\left[F^2\frac{x^2}{x'}+x'-2x(\ln F)'\right]}. \tag{27}$$

因此,$x(u)$ 满足(20)。另外,由 $(x(u),y(u))$ 为(26)的解,$\forall u\in(-\delta,\delta)$,$(x(u),y(u))\in U$,从而

$$Cx'^2-4[F^2x^2x'+x'^3-2xx'^2(\ln F)']>0,$$

即 $C-4\left[F^2\dfrac{x^2}{x'}+x'-2x(\ln F)'\right]>0.$

于是由(27),$\left(\ln\dfrac{x'}{F^2}\right)'$ 恒不为 0,从而由命题 2.2,$x(u)$ 满足(15)。

由定理 1.2,存在 Bonnet 曲面 S,使得平均曲率为 $x(u)$,第一基本型为 $I=\dfrac{F^2}{x'}(du^2+dv^2)$。此时,$S$ 的 Gauss 曲率为

$$\frac{1}{2}\left(\ln\frac{x'}{F^2}\right)''\frac{x'}{F^2}=x^2-\left(\frac{x'}{F}\right)^2.$$

如果 S 的 Gauss 曲率恒为 0,由命题 2.1,$F^2=\dfrac{1}{(u+t)^2}$,设 $x=-\dfrac{\beta}{u+t}$,于是 $\dfrac{x'}{F^2}=\beta$。这与 $x(u)$ 满足

$$\left(\ln\frac{x'}{F^2}\right)'=\sqrt{C-4\left[F^2\frac{x^2}{x'}+x'-2x(\ln F)'\right]}>0$$

矛盾。因此,S 的 Gauss 曲率不恒为 0。这就证明了定理 A。

3　定理 B 的证明

设 $S,\hat{S}$ 为两 Bonnet 曲面,且 $S,\hat{S}$ 之间存在一个保主曲率保定向的共形变换 $\sigma:S\to\hat{S}$,这里的定向是指由主曲率标架确定的定向。设 S 与 $\hat{S}$ 的第一基本型分别为 ds^2 与 $d\hat{s}^2$,由于 σ 是共形变换,$\sigma^*d\hat{s}^2=M^2ds^2$,这里 M 为 S 上正的光滑函数。设 S 上的主曲率为 $a,c(a>c)$,平均曲率为 H,Gauss 曲率为 K;$\hat{S}$ 上的主曲率为 $\hat{a},\hat{c}(\hat{a}>\hat{c})$,平均曲率为 $\hat{H}$,Gauss 曲率为 $\hat{K}$。则 $\sigma^*(\hat{a})=a$,$\sigma^*(\hat{c})=c$,$\sigma^*(\hat{H})=H$,$\sigma^*(\hat{K})=K$。再分别取 S 与 $\hat{S}$ 上主曲率标架 $\{\omega_1,\omega_2\}$ 与 $\{\hat{\omega}_1,\hat{\omega}_2\}$,由 σ 保持定向,设

$$\frac{1}{M}\begin{pmatrix}\sigma^*\hat{\omega}_1\\ \sigma^*\hat{\omega}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi\\ -\sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\omega_1\\ \omega_2\end{pmatrix}. \tag{28}$$

下面将要证明,若 K 的零点孤立则 $M=1$,即 σ 为等距;若 K 恒为 0,则 M 为常数。

首先,可定义 S 上 $*$ 算子,

$$*\omega_1=\omega_2,\ *\omega_2=-\omega_1,$$

也可定义 $\hat{S}$ 上的★算子,

$$\star\hat{\omega}_1=\hat{\omega}_2,\ \star\hat{\omega}_2=-\hat{\omega}_1.$$

由(28),

$$*(\sigma^*\hat{\omega}_1)=\sigma^*\hat{\omega}_2,\ *(\sigma^*\hat{\omega}_2)=-\sigma^*\hat{\omega}_1,$$

因此,有

$$*\circ\sigma^*=\sigma^*\circ\star. \tag{29}$$

设

$$2dH=(a-c)(A\omega_1+B\omega_2),$$
$$\theta_1=A\omega_1+B\omega_2,\ \theta_2=-B\omega_1+A\omega_2,$$
$$\alpha_1=A\omega_1-B\omega_2,\ \alpha_2=B\omega_1+A\omega_2,$$
$$2d\hat{H}=(\hat{a}-\hat{c})(\hat{A}\hat{\omega}_1+\hat{B}\hat{\omega}_2),$$
$$\hat{\theta}_1=\hat{A}\hat{\omega}_1+\hat{B}\hat{\omega}_2,\ \hat{\theta}_2=-\hat{B}\hat{\omega}_1+\hat{A}\hat{\omega}_2,$$
$$\hat{\alpha}_1=\hat{A}\hat{\omega}_1-\hat{B}\hat{\omega}_2,\ \hat{\alpha}_2=\hat{B}\hat{\omega}_1+\hat{A}\hat{\omega}_2.$$

再设 ω_{12} 为 S 上关于 $\{\omega_1,\omega_2\}$ 的联络 1-形式,$\hat{\omega}_{12}$ 为 $\hat{S}$ 上关于 $\{\hat{\omega}_1,\hat{\omega}_2\}$ 的联络 1-形式。则有

$$2\mathrm{d}H=(a-c)\theta_1,$$

$$2\mathrm{d}\hat{H}=(\hat{a}-\hat{c})\hat{\theta}_1, \tag{30}$$

$$\mathrm{dlog}(a-c)=\alpha_1+2*\omega_{12}, \tag{31}$$

$$\mathrm{dlog}(\hat{a}-\hat{c})=\hat{\alpha}_1+2\star\hat{\omega}_{12}. \tag{32}$$

用 σ 将(30)两边拉回有

$$2\mathrm{d}H=(a-c)\sigma^*\hat{\theta}_1,$$

因此,

$$\theta_1=\sigma^*\hat{\theta}_1. \tag{33}$$

在(33)两边作用 $*$,并用(29)得

$$\theta_2=\sigma^*\hat{\theta}_2.$$

因此, $\theta_1\wedge\theta_2=\sigma^*(\hat{\theta}_1\wedge\hat{\theta}_2)$.

注意到

$$\theta_1\wedge\theta_2=\alpha_1\wedge\alpha_2=d\alpha_2,\hat{\theta}_1\wedge\hat{\theta}_2=\hat{\alpha}_1\wedge\hat{\alpha}_2=\mathrm{d}\hat{\alpha}_2,$$

于是,

$$\mathrm{d}\alpha_2=\mathrm{d}\sigma^*\hat{\alpha}_2. \tag{34}$$

在(31)两边作用 $*$,得

$$*\,\mathrm{dlog}(a-c)=\alpha_2-2\omega_{12}.$$

在(32)两边作用★,得

$$\star\mathrm{dlog}(\hat{a}-\hat{c})=\hat{\alpha}_2-2\hat{\omega}_{12}. \tag{35}$$

再用 σ 将(35)两边拉回得

$$*\,\sigma^*\mathrm{dlog}(\hat{a}-\hat{c})=\sigma^*\hat{\alpha}_2-2\sigma^*\hat{\omega}_{12}, \tag{36}$$

这里用到(29)。(36)左边为 $*\,\mathrm{dlog}(a-c)$, 因此,有 $\alpha_2-2\omega_{12}=\sigma^*\hat{\alpha}_2-2\sigma^*\hat{\omega}_{12}$.

由(34),

$$\mathrm{d}\omega_{12}=\mathrm{d}\sigma^*\hat{\omega}_{12}=\sigma^*\mathrm{d}\hat{\omega}_{12}. \tag{37}$$

S 与 $\hat{S}$ 上的 Gauss 方程分别为

$$\mathrm{d}\omega_{12}=-K\omega_1\wedge\omega_2, \tag{38}$$

$$\mathrm{d}\hat{\omega}_{12}=-\hat{K}\hat{\omega}_1\wedge\hat{\omega}_2. \tag{39}$$

用 σ 将(39)两边拉回得

$$\sigma^*\mathrm{d}\hat{\omega}_{12}=-K\sigma^*\hat{\omega}_1\wedge\sigma^*\hat{\omega}_2.$$

由(28),(37)和(38),

$$K(M^2-1)=0.$$

因此,如果 K 的零点孤立, $M=1$。

设 K 恒为 0。首先,由定理 2,在 S 上存在与定向相容的等温坐标 (u,v) 使得 H 只是 u 的函数, $H'(u)>0$ 并且满足(15),此时, S 的第一基本型 $\mathrm{d}s^2=\frac{F^2}{H'}(\mathrm{d}u^2+\mathrm{d}v^2)$。因为 K 恒为 0,由命题 2.1, $F^2=\frac{1}{(u+t)^2}$, $H=-\frac{\beta}{u+t}$, 这里 t,β 为常数且 $\beta>0$。因此, $\mathrm{d}s^2=\frac{1}{\beta}(\mathrm{d}u^2+\mathrm{d}v^2)$。由于 K 恒为 0, $\sigma^*\hat{K}=K$, $\hat{K}$ 恒为 0。类似地,在 $\hat{S}$ 上存在与定向相容的等温坐标 $(\hat{u},\hat{v})$ 使得 $\hat{H}=-\frac{\hat{\beta}}{\hat{u}+\hat{t}}$, $\mathrm{d}\hat{s}^2=\frac{1}{\hat{\beta}}(\mathrm{d}\hat{u}^2+\mathrm{d}\hat{v}^2)$, 这里的 $\hat{t},\hat{\beta}$ 为常数且 $\hat{\beta}>0$。注意到 σ 为保定向的共形映射,因此,有 Cauchy-Riemann 方程

$$\frac{\partial\hat{u}}{\partial u}=\frac{\partial\hat{v}}{\partial v},\ \frac{\partial\hat{u}}{\partial v}=-\frac{\partial\hat{v}}{\partial u}. \tag{40}$$

而由 $\sigma^*\hat{H}=H$, $\hat{u}=\frac{\hat{\beta}}{\beta}u+\frac{\hat{\beta}}{\beta}t+\hat{t}$, 因此,利用(40),

$$\frac{\partial\hat{v}}{\partial v}=\frac{\hat{\beta}}{\beta},\ \frac{\partial\hat{u}}{\partial v}=\frac{\partial\hat{v}}{\partial u}=0.$$

于是

$$\sigma^*\mathrm{d}\hat{s}^2=\frac{1}{\hat{\beta}}\frac{\hat{\beta}^2}{\beta^2}(\mathrm{d}u^2+\mathrm{d}v^2)=\frac{\hat{\beta}}{\beta}\mathrm{d}s^2.$$

因此, M 为常数,不必为 1。即完成定理 B 的证明。

作者非常感谢彭家贵教授,彭教授为作者提供了很多资料并与作者进行了非常有益的讨论。

参考文献

[1] Bonnet O. Memoire sur la theorie des surfaces applicables [J]. Ec Polyt, 1867, 42: 79-92.

[2] Chern S S. Deformation of surfaces preserving principal curvatures[C]//Chavel I. Differential geometry and complex analysis. New York: Springer, 1985: 155-163.

[3] Colares A G, Kenmotsu K. Isometric deformation of surfaces in $\mathbb{R}^3$ preserving the mean curvature function [J]. Pacific Journal of Mathematics, 1987, 136(1): 71-80.

[4] Chen X X, Peng C K. Derformation of surfaces preserving principal curvatures[C]//Jiang B J, Peng C K. Differential geometry and topology. New York: Springer, 1989: 63-70.

[5] Hazzidakis J N. Biegung mit erhaltung der hauptkrummüngsradien[J]. Reine Angew Math, 1897, 117: 42-56.

[6] Peng C K, Lu S N. On the classification of the Bonnet surfaces [J]. Journal of the Graduate School Academia Sinica, 1992, 9(2): 107-116.

[7] Bobenko A, Eitner U. Bonnet surfaces and Painlevé equations[J]. Reine Angew Math, 1998, 499: 47-81.

[8] Chen W H, Li H Z. Bonnet surfaces and isothermic surfaces [J]. Results in Mathematics, 1997, 31: 40-52.