

文章编号:2095-6134(2020)05-0577-05

# 交换 $p$ 群的整群环以及它的极大序的 $K_1$ 群<sup>\*</sup>

杨全李<sup>†</sup>, 唐国平

(中国科学院大学数学科学学院, 北京 100049)  
(2019 年 1 月 16 日收稿; 2019 年 5 月 6 日收修改稿)

Yang Q L, Tang G P. The  $K_1$  group of integral group ring and its maximal order for a commutative  $p$  group[J].  
Journal of University of Chinese Academy of Sciences, 2020, 37(5): 577-581.

**摘 要** 整群环是代数乃至许多数学分支中很重要的一类环,也是代数  $K$  理论主要的研究对象之一。对几类交换  $p$  ( $p$  为素数) 群  $G$  的整群环  $\mathbb{Z}G$ , 作为半单代数  $\mathbb{Q}G$  的一个  $\mathbb{Z}$ -序, 通过将其嵌入到极大  $\mathbb{Z}$ -序  $\Gamma$  之中, 然后利用核群的性质研究  $K_1(\mathbb{Z}G)$  在  $K_1(\Gamma)$  中的指数问题。主要结果有: 首先对几类交换  $p$  群  $G$  给出  $[(\Gamma_p)^\times : (\mathbb{Z}_p G)^\times]$  的确切表达式, 然后用来确定  $[K_1(\Gamma) : K_1(\mathbb{Z}G)]$  的具体数值。

**关键词** 整群环;  $\mathbb{Z}$ -序; 极大序; 核群;  $K_1$  群

中图分类号: O154.3      文献标志码: A      doi:10.7523/j.issn.2095-6134.2020.05.001

## The $K_1$ group of integral group ring and its maximal order for a commutative $p$ group

YANG Quanli, TANG Guoping

(School of Mathematical Sciences, University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China)

**Abstract** Group rings are very important rings in algebra and many other branches of mathematics. It is also one of the main research subjects of algebraic  $K$ -theory. In this work, we mainly deal with integral group rings  $\mathbb{Z}G$  for some abelian  $p$  ( $p$  is prime) groups  $G$ . We can regard  $\mathbb{Z}G$  as a  $\mathbb{Z}$ -order of the semi-simple algebra  $\mathbb{Q}G$  and embed it into the maximal  $\mathbb{Z}$ -order  $\Gamma$ . Then we use the properties of the kernel group to study the exponential problem of  $K_1(\mathbb{Z}G)$  in  $K_1(\Gamma)$ . In this paper, there are two main results. First, the explicit formula of  $[(\Gamma_p)^\times : (\mathbb{Z}_p G)^\times]$  is obtained for some abelian  $p$  groups. Secondly, by using the formula, we get the specific result of  $[K_1(\Gamma) : K_1(\mathbb{Z}G)]$  for some abelian  $p$  groups.

**Keywords** integral group ring;  $\mathbb{Z}$ -order; maximal order; kernel group;  $K_1$  group

当  $G$  为有限交换群时,  $K_1(\mathbb{Z}G) \cong SK_1(\mathbb{Z}G) \oplus (\mathbb{Z}G)^\times$  是代数  $K$  理论中众所周知的结果。然而, 通常情况下  $SK_1(\mathbb{Z}G)$  的结构十分复杂。后面要列出的引理 1.3 说明在很多我们关心的情形下  $SK_1(\mathbb{Z}G)$  平凡。通常将  $\mathbb{Z}G$  视为半单代数  $\mathbb{Q}G$  的一个  $\mathbb{Z}$ -序, 由引理 1.4, 可将  $\mathbb{Z}G$  嵌入到一个极大  $\mathbb{Z}$ -序

<sup>\*</sup> 国家自然科学基金(11771422)资助  
<sup>†</sup> 通信作者, E-mail: yangquanli16@mails.ucas.ac.cn

$\Gamma$  中. 定义:  $\mathbb{Z}G_p = \mathbb{Z}_p G = \mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p$ ,  $\Gamma_p = \Gamma \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p$ , 其中  $p$  为素数,  $\mathbb{Z}_p$  为  $p$ -adic 整数环. 对几类特殊的有限交换  $p$  群  $G$ , 本文给出指数  $[(\Gamma_p)^\times : (\mathbb{Z}_p G)^\times]$  的确切公式. 然后利用核群  $D(\mathbb{Z}G)$  的相关性质得到当  $p = 2$  时有关  $[K_1(\Gamma) : K_1(\mathbb{Z}G)]$  的部分结果.

## 1 预备知识

**定义 1.1** 对阶为素数  $p$  的幂的交换群  $G$ , 由有限生成交换群的结构定理可将  $G$  唯一地表示为某些  $p^{k_i}$  阶循环群的直和,  $i = 1, 2, \dots, n$ , 且  $k_1 \leq k_2 \leq \dots \leq k_n$ , 数组  $(k_1, k_2, \dots, k_n)_p$  称为群  $G$  的型.

**引理 1.1** 令  $p$  是一个素数, 群  $G$  的型为  $(k_1, k_2, \dots, k_n)_p$ . 为方便起见记  $k_0 = 0$ , 对任意整数  $h$ ,  $0 < h \leq k_n$ , 记  $v_h$  是满足  $k_{v_h} < h \leq k_{v_h+1}$  的非负整数, 且记  $a_h = \sum_{\mu=0}^{v_h} k_\mu$ . 则  $G$  的阶为  $p^h$  的循环子群的个数是

$$t(p^h) = \frac{p^{n-v_h} - 1}{p - 1} p^{(n-v_h-1)(h-1)+a_h}.$$

**证明** 见文献[1-3].  $\square$

**引理 1.2** 对代数数域  $F$  的代数整数环  $O_F$ , 有  $SK_1(O_F) = 1$ .

**证明** 见文献[4].  $\square$

**引理 1.3** 对任一有限交换群  $G$ ,  $SK_1(\mathbb{Z}G) = 1$  当且仅当  $G \cong (C_2)^n$  或者  $G$  的每一 Sylow- $p$  子群形如  $C_{p^n}$  或者  $C_p \times C_{p^n}$ .

**证明** 见文献[5].  $\square$

**引理 1.4** 对有限交换群  $G$ ,  $\mathbb{Z}G$  是半单代数  $\mathbb{Q}G$  的一个  $\mathbb{Z}$ -序, 且  $\mathbb{Q}G$  只有唯一极大  $\mathbb{Z}$ -序  $\Gamma$ ,  $\Gamma \supseteq \mathbb{Z}G$ . 如果  $\mathbb{Q}G \cong \prod_{i=1}^r \mathbb{Q}(\xi_{l_i})$  (其中  $\xi_{l_i}$  表  $l_i$  次本原单位根), 则  $\Gamma = \prod_{i=1}^r \mathbb{Z}[\xi_{l_i}]$ .

**证明** 见文献[6].  $\square$

**引理 1.5** 在上述引理条件下,  $(\mathbb{Z}G)^\times$  的挠部分为  $\{\pm g \mid g \in G\}$ , 且  $(\mathbb{Z}G)^\times$  与  $\Gamma^\times$  的自由部分的秩相同. 特别有,  $[\Gamma^\times : (\mathbb{Z}G)^\times] < \infty$ .

**证明** 见文献[7].  $\square$

**定义 1.2** 对任意素数  $p$ , 记  $\mathbb{Z}G_p = \mathbb{Z}_p G = \mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p$ ,  $\Gamma_p = \Gamma \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p$ , 其中  $\mathbb{Z}_p$  为  $p$ -adic 整数环.  $\mathbb{Z}$  中的素理想  $(p)$  称为  $\mathbb{Z}G$ -奇异的, 若  $\Gamma_p \neq \mathbb{Z}G_p$ . 记  $S(\mathbb{Z}G)$  为所有  $\mathbb{Z}G$  奇异素理想之集.

**定义 1.3** 令  $G$  是有限群, 对  $\mathbb{Q}G$  中任一  $\mathbb{Z}$ -序

$\Lambda$  及素数  $p$ , 用  $\Lambda_{(p)}$  表示  $\Lambda$  在  $\mathbb{Z}$  的素理想  $(p)$  处的局部化, 则有  $K_0(\Lambda) \rightarrow K_0(\Lambda_{(p)}), [M] \rightarrow [\Lambda_{(p)} \otimes_{\Lambda} M]$ . 局部自由类群  $CL(\Lambda)$  定义为映射  $K_0(\Lambda) \rightarrow \prod_p K_0(\Lambda_{(p)})$  的核, 其中  $p$  取遍所有素数.

在上述定义条件下, 若  $\mathbb{Q}G$  中存在包含  $\Lambda$  的极大  $\mathbb{Z}$ -序, 任取其中一个并记为  $\Gamma$  (注: 当  $G$  非交换时  $\Gamma$  不唯一). 由文献[8], 映射  $[M] \rightarrow [\Gamma \otimes_{\Lambda} M]$  给出一个满同态  $CL(\Lambda) \rightarrow CL(\Gamma)$ , 该满同态的核称为核群, 记为  $D(\Lambda)$ . 于是有交换群的正合列

$$0 \rightarrow D(\Lambda) \rightarrow CL(\Lambda) \rightarrow CL(\Gamma) \rightarrow 0.$$

而由文献[9]可知 (在同构意义下)  $D(\Lambda)$  与极大  $\mathbb{Z}$ -序  $\Gamma$  的选取无关. 在上述意义下, 特别当  $G$  是一个交换群时, 取  $\Lambda = \mathbb{Z}G$ . 由引理 1.4 知这种情形下上述意义下的极大序唯一, 而且引理 1.4 给出了这个极大序. 根据文献[10]有

**引理 1.6** 有正合序列

$$1 \rightarrow \Gamma^\times / (\mathbb{Z}G)^\times \rightarrow \prod_{S(\mathbb{Z}G)} (\Gamma_{p_0})^\times / (\mathbb{Z}G_{p_0})^\times \rightarrow CL(\mathbb{Z}G) \rightarrow CL(\Gamma) \rightarrow 1.$$

且有

$$(i) \quad |D(\mathbb{Z}G)| \cdot [\Gamma^\times : (\mathbb{Z}G)^\times] =$$

$$\prod_{S(\mathbb{Z}G)} [(\Gamma_{p_0})^\times : (\mathbb{Z}G_{p_0})^\times].$$

$$(ii) \quad [(\Gamma_{p_0})^\times : (\mathbb{Z}G_{p_0})^\times] = l_{p_0} \cdot m_{p_0}, \text{ 这里}$$

$$l_{p_0} = \frac{|(\Gamma_{p_0}/J_{p_0})^\times|}{|\{ \mathbb{Z}G_{p_0}/(J_{p_0} \cap \mathbb{Z}G_{p_0}) \}^\times|},$$

$$m_{p_0} = [J_{p_0} : (\mathbb{Z}G_{p_0} \cap J_{p_0})]$$

$$= \frac{[\Gamma_{p_0} : \mathbb{Z}G_{p_0}][\mathbb{Z}G_{p_0} : (J_{p_0} \cap \mathbb{Z}G_{p_0})]}{[\Gamma_{p_0} : J_{p_0}]},$$

其中  $J_{p_0}$  是  $\Gamma_{p_0}$  的 Jacobson 根.

**证明** 见文献[10].  $\square$

特别地, 当  $G$  是阶为  $p^n$  的有限交换群时,  $S(\mathbb{Z}G) = \{(p)\}$ , 引理 1.6 中的正合列变得简单了. 设  $\mathbb{Q}G = \prod_{i=1}^m F_i$  是分圆域的直和, 记  $d_i$  是  $F_i$  的判别式, 则引理 1.6 有如下的简单形式

**引理 1.7**  $|D(\mathbb{Z}G)|$  是  $p$  的幂, 更确切地说有

$$|D(\mathbb{Z}G)| = [(\Gamma_p)^\times : (\mathbb{Z}G_p)^\times] / [\Gamma^\times : (\mathbb{Z}G)^\times]$$

且

$$[(\Gamma_p)^\times : (\mathbb{Z}G_p)^\times]^2 = p^{np^n - 2t} \prod_{i=1}^m |d_i|,$$

其中  $t = t(G) = m - 1$  是  $G$  的非平凡循环子群的个数。

**证明** 见文献[10]。□

**引理 1.8** 若  $G$  是指数为  $m$  的有限交换群, 则  $\mathbb{Q}G = \bigoplus_{d|m} t(d) \mathbb{Q}(\xi_d)$  ( $\xi_d$  表  $d$  次本原单位根), 其中  $t(d)$  是  $G$  的  $d$  阶循环子群的个数。

**证明** 见文献[11]。□

## 2 主要结果

我们的第一个主要结果是对  $G = C_{p^{n_1}} \times C_{p^{n_2}}$ ,  $0 \leq n_1 \leq n_2$ , 给出  $[(\Gamma_p)^\times : (\mathbb{Z}_p G)^\times]$  的具体公式, 为此分别考虑以下情形。

**定理 2.1** 若  $G = C_{p^n}$ , ( $n \geq 0$ ), 则

$$[(\Gamma_p)^\times : (\mathbb{Z}_p G)^\times] = p^{\frac{p^n-1}{p-1}-n}.$$

**证明** 由引理 1.1,  $G$  的型为  $(n)_p$ 。这时, 对任意  $0 < h \leq n$ ,  $G$  有唯一的阶为  $p^h$  的循环子群, 于是  $t = n$ 。由引理 1.8 知  $\mathbb{Q}G = \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q}(\xi_p) \oplus \cdots \oplus \mathbb{Q}(\xi_{p^n})$ 。文献[12] 给出分圆域  $\mathbb{Q}(\xi_s)$  的判别式

$$d(\mathbb{Q}(\xi_s)) = (-1)^{\varphi(s)/2} s^{\varphi(s)} / \prod_{p|s} p^{\varphi(s)/(p-1)}.$$

$$\text{故 } |d_i| = |d(\mathbb{Q}(\xi_{p^i}))| = p^{p^{i-1}(ip-i-1)},$$

从而

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^n |d_i| &= \prod_{i=1}^n p^{p^{i-1}(ip-i-1)} \\ &= p^{\sum_{i=1}^n [p^{i-1}(ip-i-1)]} \\ &= p^{np^n - \frac{2(p^n-1)}{p-1}}. \end{aligned}$$

于是由引理 1.7 得

$$\begin{aligned} [(\Gamma_p)^\times : (\mathbb{Z}_p G)^\times]^2 &= p^{np^n-2n} / \prod_{i=1}^n |d_i| \\ &= p^{\frac{2(p^n-1)}{p-1}-2n}, \end{aligned}$$

$$\text{故 } [(\Gamma_p)^\times : (\mathbb{Z}_p G)^\times] = p^{\frac{p^n-1}{p-1}-n}.$$

当  $n = 0$  时, 上式显然成立。□

**定理 2.2** 当  $G = C_{p^n} \times C_{p^n}$ , ( $0 \leq n$ ) 时, 则

$$[(\Gamma_p)^\times : (\mathbb{Z}_p G)^\times] = p^q,$$

$$\text{其中 } q = \frac{n}{2} p^{2n} + \frac{(p+2)(p^{2n}-1)}{2(p^2-1)} - \frac{(p+1)(p^n-1)}{p-1}.$$

**证明** 此时  $|G| = p^{2n}$ ,  $G$  的型为  $(n, n)_p$ , 则

当  $1 \leq h \leq n$  时,  $v_h = 0, a_h = \sum_{\mu=0}^{v_h} k_\mu = 0$ 。由引理

1.1 有

$$\begin{aligned} t(p^h) &= \frac{p^{2-v_h} - 1}{p - 1} p^{(2-v_h-1)(h-1)+a_h} \\ &= (p+1)p^{h-1}. \end{aligned}$$

于是  $t = t(G) = \sum_{h=1}^n (p+1)p^{h-1} = \frac{(p+1)(p^n-1)}{p-1}$ ,

再由引理 1.8 知  $t(p^i)$  ( $1 \leq i \leq n$ ) 就是  $\mathbb{Q}G = \mathbb{Q} \oplus t_1 \mathbb{Q}(\xi_p) \oplus \cdots \oplus t_n \mathbb{Q}(\xi_{p^n})$  中  $t_i$  的值。于是有  $\mathbb{Q}G = \mathbb{Q} \oplus (p+1) \mathbb{Q}(\xi_p) \oplus (p+1)p \mathbb{Q}(\xi_{p^2}) \oplus \cdots \oplus (p+1)p^{n-1} \mathbb{Q}(\xi_{p^n})$ 。

根据文献[12]有关分圆域的判别式的计算公式

$$d(\mathbb{Q}(\xi_s)) = (-1)^{\varphi(s)/2} s^{\varphi(s)} / \prod_{p|s} p^{\varphi(s)/(p-1)},$$

于是在这种情形下有

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^n |d_i| &= p^{\sum_{i=1}^n (p+1)p^{2i-2}(ip-i-1)} \\ &= p^{np^{2n} - \frac{(p+2)(p^{2n}-1)}{p^2-1}}. \end{aligned}$$

由引理 1.7 得

$$\begin{aligned} [(\Gamma_p)^\times : (\mathbb{Z}_p G)^\times]^2 &= \\ p^{2np^{2n} - \frac{2(p+1)(p^{2n}-1)}{p-1}} / p^{\frac{np^{2n} - p^{2n+1} + 2p^{2n}-p-2}{p^2-1}} &= p^{2q}, \end{aligned}$$

从而  $[(\Gamma_p)^\times : (\mathbb{Z}_p G)^\times] = p^q$ 。

上式对  $n = 0$  情形显然成立。□

**定理 2.3** 当  $G = C_{p^{n_1}} \times C_{p^{n_2}}$ ,  $0 < n_1 < n_2$  时, 有

$$[(\Gamma_p)^\times : (\mathbb{Z}_p G)^\times] = p^q.$$

其中

$$\begin{aligned} q &= \frac{n_1}{2} p^{n_1+n_2} - (n_2 - n_1)p^{n_1} - \\ &\quad \frac{(p+1)(p^{n_1}-1) + (p^{n_1}-p^{n_2})p^{n_1}}{p-1} + \\ &\quad \frac{(p+2)(p^{2n_1}-1)}{2(p^2-1)}. \end{aligned}$$

**证明** 此时  $|G| = p^{n_1+n_2}$ ,  $G$  的型为  $(n_1,$

$n_2)_p$ 。则当  $1 \leq h \leq n_1$  时,  $v_h = 0, a_h = \sum_{\mu=0}^{v_h} k_\mu = 0$ , 于是此时有

$$\begin{aligned} t(p^h) &= \frac{p^{2-v_h} - 1}{p - 1} p^{(2-v_h-1)(h-1)+a_h} \\ &= (p+1)p^{h-1}. \end{aligned}$$

当  $n_1 < h \leq n_2$  时,  $v_h = 1, a_h = \sum_{\mu=0}^{v_h} k_\mu = n_1$ , 此时有

$$t(p^h) = \frac{p^{2-v_h} - 1}{p - 1} p^{(2-v_h-1)(h-1)+a_h} \\ = p^{n_1}.$$

综上所述有

$$t(p^h) = \begin{cases} (p+1)p^{h-1}, & \text{若 } 0 < h \leq n_1 \\ p^{n_1}, & \text{若 } n_1 < h \leq n_2 \end{cases}.$$

于是

$$t = t(G) = \sum_{h=1}^{n_2} t(p^h) = \sum_{h=1}^{n_1} t(p^h) + \sum_{h=n_1+1}^{n_2} t(p^h) \\ = \frac{(p+1)(p^{n_1}-1)}{p-1} + (n_2 - n_1)p^{n_1}.$$

类似上面定理叙述可求得对应于引理 1.7 中的

$$\prod_{i=1}^m |d_i|$$

$$\prod_{i=1}^m |d_i| = p^{\left[ n_2 p^{n_2-n_1} p^{n_1} + \frac{2(p^{n_1}-p^{n_2})}{p-1} \right] p^{n_1+n_1} p^{2n_1} - \frac{(p+2)(p^{2n_1}-1)}{p^2-1}}.$$

由引理 1.7

$$[(\Gamma_p)^\times : (\mathbb{Z}_p G)^\times]^2 = p^{(n_1+n_2)p^{n_1+n_2}-2t} / \prod_{i=1}^m |d_i| \\ = p^{2q}.$$

于是  $[(\Gamma_p)^\times : (\mathbb{Z}_p G)^\times] = p^q$ .  $\square$

综合定理 2.1~定理 2.3 的结果有

**定理 2.4** 对  $G = C_{p^{n_1}} \times C_{p^{n_2}}, 0 \leq n_1 \leq n_2$ , 有

$$[(\Gamma_p)^\times : (\mathbb{Z}_p G)^\times] = p^q,$$

其中

$$q = \frac{n_1}{2} p^{n_1+n_2} - (n_2 - n_1) p^{n_1} - \\ \frac{(p+1)(p^{n_1}-1) + (p^{n_1}-p^{n_2})p^{n_1}}{p-1} + \\ \frac{(p+2)(p^{2n_1}-1)}{2(p^2-1)}.$$

对于任意  $(k_1, k_2, \dots, k_n)_p$  型的交换群, 相应的计算公式非常难以给出, 然而对下面特殊情形, 有

**定理 2.5** 当  $G = (C_{p^n})^l, n \geq 0; l > 0$  时有

$$[(\Gamma_p)^\times : (\mathbb{Z}_p G)^\times] = p^q,$$

其中

$$q = \frac{n(l-1)}{2} p^{nl} + \frac{p^{nl} + p - 2}{2(p-1)} + \\ \frac{p^{nl} - p^l}{2(p^l-1)} - \frac{(p^l-1)(p^{n(l-1)}-1)}{(p^{l-1}-1)(p-1)}.$$

**证明** 此时  $|G| = p^{nl}$ ,  $G$  的型为

$$(\underbrace{n, n, \dots, n}_{\text{共 } l \text{ 项}})_p. \text{ 当 } 1 \leq h \leq n \text{ 时, } v_h = 0, a_h = \sum_{\mu=0}^{v_h} k_\mu$$

$= 0$ 。于是此时有

$$t(p^h) = \frac{p^{l-v_h} - 1}{p - 1} p^{(l-v_h-1)(h-1)+a_h} \\ = \frac{p^l - 1}{p - 1} p^{(l-1)(h-1)}.$$

故  $t = t(G) = \sum_{h=1}^n t(p^h) = \frac{(p^l-1)(p^{n(l-1)}-1)}{(p^{l-1}-1)(p-1)}$ . 类

似上面定理的叙述可求得

$$\prod_{i=1}^m |d_i| = \prod_{h=1}^n (p^{h-1(hp-h-1)})^{t(p^h)} \\ = p^{np^{nl} - \frac{p^{nl}+p-2}{p-1} + \frac{p^l-p^{nl}}{p^{l-1}}}.$$

于是由引理 1.7

$$[(\Gamma_p)^\times : (\mathbb{Z}_p G)^\times]^2 = p^{np^{nl}-2t} / \prod_{i=1}^m |d_i| \\ = p^{2q},$$

故  $[(\Gamma_p)^\times : (\mathbb{Z}_p G)^\times] = p^q$ . 易验证当  $n = 0$  时, 上式依然成立.  $\square$

**推论 2.1** (i) 若  $G = C_2 \times C_2$ , 则  $[K_1(\Gamma) :$

$$K_1(\mathbb{Z}G)] = 2,$$

$$(ii) \text{ 若 } G = C_2 \times C_{2^2}, \text{ 则 } [K_1(\Gamma) : K_1(\mathbb{Z}G)] = 2^4,$$

$$(iii) \text{ 若 } G = C_2 \times C_{2^3}, \text{ 则 } [K_1(\Gamma) : K_1(\mathbb{Z}G)] = 2^{12},$$

$$(iv) \text{ 若 } G = C_2, \text{ 则 } [K_1(\Gamma) : K_1(\mathbb{Z}G)] = 1,$$

$$(v) \text{ 若 } G = C_{2^2}, \text{ 则 } [K_1(\Gamma) : K_1(\mathbb{Z}G)] = 2,$$

$$(vi) \text{ 若 } G = C_{2^3}, \text{ 则 } [K_1(\Gamma) : K_1(\mathbb{Z})] = 2^4,$$

$$(vii) \text{ 若 } G = C_{2^4}, \text{ 则 } [K_1(\Gamma) : K_1(\mathbb{Z}G)] = 2^{10}.$$

**证明** 由文献[4]有

$$K_1(\Gamma) = (\Gamma)^\times \oplus SK_1(\Gamma),$$

$$K_1(\mathbb{Z}G) = (\mathbb{Z}G)^\times \oplus SK_1(\mathbb{Z}G).$$

由引理 1.4 知  $\Gamma$  是一些代数整数环的直和, 于是由引理 1.2 知  $SK_1(\Gamma) = 1$ , 而由引理 1.3 知在上述(i)-(vii)情况下均有  $SK_1(\mathbb{Z}G) = 1$ , 于是对于(i)-(vii), 下式总是成立的

$$[K_1(\Gamma) : K_1(\mathbb{Z}G)] = [(\Gamma)^\times : (\mathbb{Z}G)^\times].$$

(i) 由文献[13]知, 此时  $|D(\mathbb{Z}G)| = 1$ , 由定理 2.2 得

$$[K_1(\Gamma) : K_1(\mathbb{Z}G)] = [(\Gamma)^\times : (\mathbb{Z}G)^\times] \\ = [(\Gamma_2)^\times : (\mathbb{Z}_2 G)^\times] / |D(\mathbb{Z}G)| \\ = 2.$$

(ii) 由文献[13]得知此时  $|D(\mathbb{Z}G)| = 2$ , 由定理 2.3 得

$$[K_1(\Gamma) : K_1(\mathbb{Z}G)] = [(\Gamma)^\times : (\mathbb{Z}G)^\times] \\ = [(\Gamma_2)^\times : (\mathbb{Z}_2 G)^\times] / |D(\mathbb{Z}G)|$$

$$= 2^4.$$

(iii) 由文献[13]知,此时  $|D(\mathbb{Z}G)| = 2^3$ , 由定理 2.3 得

$$\begin{aligned} [K_1(\Gamma) : K_1(\mathbb{Z}G)] &= [(\Gamma)^\times : (\mathbb{Z}G)^\times] \\ &= [(\Gamma_2)^\times : (\mathbb{Z}_2G)^\times] / |D(\mathbb{Z}G)| \\ &= 2^{12}. \end{aligned}$$

(iv) 当  $G = C_2$  时由文献[13]知  $|D(\mathbb{Z}G)| = 1$ , 由定理 2.1 得

$$\begin{aligned} [K_1(\Gamma) : K_1(\mathbb{Z}G)] &= [(\Gamma)^\times : (\mathbb{Z}G)^\times] \\ &= [(\Gamma_2)^\times : (\mathbb{Z}_2G)^\times] / |D(\mathbb{Z}G)| \\ &= 1. \end{aligned}$$

(v) 当  $G = C_{2^2}$  时由文献[13]知  $|D(\mathbb{Z}G)| = 1$ , 由定理 2.1 得

$$\begin{aligned} [K_1(\Gamma) : K_1(\mathbb{Z}G)] &= [(\Gamma)^\times : (\mathbb{Z}G)^\times] \\ &= [(\Gamma_2)^\times : (\mathbb{Z}_2G)^\times] / |D(\mathbb{Z}G)| \\ &= 2. \end{aligned}$$

(vi) 当  $G = C_{2^3}$  时由文献[13]知  $|D(\mathbb{Z}G)| = 1$ , 由定理 2.1 得

$$\begin{aligned} [K_1(\Gamma) : K_1(\mathbb{Z}G)] &= [(\Gamma)^\times : (\mathbb{Z}G)^\times] \\ &= [(\Gamma_2)^\times : (\mathbb{Z}_2G)^\times] / |D(\mathbb{Z}G)| \\ &= 2^4. \end{aligned}$$

(vii) 当  $G = C_{2^4}$  时由文献[13]知  $|D(\mathbb{Z}G)| = 2$ , 由定理 2.1 得

$$\begin{aligned} [K_1(\Gamma) : K_1(\mathbb{Z}G)] &= [(\Gamma)^\times : (\mathbb{Z}G)^\times] \\ &= [(\Gamma_2)^\times : (\mathbb{Z}_2G)^\times] / |D(\mathbb{Z}G)| \\ &= 2^{10}. \end{aligned} \quad \square$$

**推论 2.2** (i) 当  $G = C_2 \times C_2 \times C_2$  时,  $[K_1(\Gamma) : K_1(\mathbb{Z}G)] = 2^4$ ,

(ii) 当  $G = C_2 \times C_2 \times C_2 \times C_2$  时,  $[K_1(\Gamma) : K_1(\mathbb{Z}G)] = 2^{11}$ 。

**证明** 由引理 1.2~引理 1.4 知,在 (i), (ii) 两种情况下均有  $SK_1(\mathbb{Z}G) = 1$  和  $SK_1(\Gamma) = 1$ , 于是均有  $[K_1(\Gamma) : K_1(\mathbb{Z}G)] = [(\Gamma)^\times : (\mathbb{Z}G)^\times]$ 。

(i) 由定理 2.5 可得

$$[(\Gamma_p)^\times : (\mathbb{Z}_pG)^\times] = 2^5.$$

由文献[13],此时  $|D(\mathbb{Z}G)| = 2$ , 于是由引理 1.7

$$\begin{aligned} [(\Gamma)^\times : (\mathbb{Z}G)^\times] &= [(\Gamma_p)^\times : (\mathbb{Z}_pG)^\times] / |D(\mathbb{Z}G)| \\ &= 2^4, \end{aligned}$$

$$\text{故 } [K_1(\Gamma) : K_1(\mathbb{Z}G)] = 2^4.$$

(ii) 由定理 2.5 可得

$$[(\Gamma_p)^\times : (\mathbb{Z}_pG)^\times] = 2^{17}.$$

由文献[13],此时  $|D(\mathbb{Z}G)| = 2^6$ , 于是由引理 1.7

$$\begin{aligned} [(\Gamma)^\times : (\mathbb{Z}G)^\times] &= [(\Gamma_p)^\times : (\mathbb{Z}_pG)^\times] / |D(\mathbb{Z}G)| \\ &= 2^{11}, \end{aligned}$$

故  $[K_1(\Gamma) : K_1(\mathbb{Z}G)] = 2^{11}$ .  $\square$

### 参考文献

- [1] Miller G A. Number of the subgroups of any given abelian group[J]. Proceedings of the National Academy of Sciences, 1939, 25(5):258-262.
- [2] Miller G A. Independent generators of the subgroups of an abelian group[J]. Proceedings of the National Academy of Sciences, 1939, 25(7):364-367.
- [3] Yeh Y. On prime power abelian groups[J]. Bulletin of the American Mathematical Society, 1948, 54:323-327.
- [4] Rosenberg J. Algebraic K-Theory and its applications[M]. 北京:世界图书出版公司北京公司, 2010.
- [5] Robert O. Whitehead groups of finite groups [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1988.
- [6] Reiner I. Maximal orders [M]. London: Academic Press, 1975.
- [7] Higman G. The units of group rings[J]. Proceeding of the London Mathematical Society, 1940, 2(1):231-248.
- [8] Swan R G. The Grothendieck ring of a finite group [J]. Topology, 1963, 2(1/2):85-110.
- [9] Jacobinski H. Genera and decompositions of lattices over orders[J]. Acta Mathematica, 1968, 121(1):1-29.
- [10] Fröhlich A. On the classgroup of integral grouprings of finite abelian groups[J]. Mathematika, 1969, 16(2):143-152.
- [11] Ayoub R G, Ayoub C. On the group ring of a finite abelian group[J]. Bulletin of the Australian Mathematical Society, 1969, 1(2):245-261.
- [12] 冯克勤. 代数数论[M]. 北京:高等教育出版社, 2001.
- [13] Cassou-Nogues P. Classes d'idéaux de l'algèbre d'un groupe abélien[J]. Mémoires de la Société Mathématique de France, 1974, 37:23-32.