第 38 卷第 1 期 中国科学院大学学报 Vol. 38 No. 1
2021 年 1 月 Journal of University of Chinese Academy of Sciences January 2021

文章编号:2095-6134(2021)01-0023-06

一类带有奇异位势的强奇性偏微分方程的正解的性质*

唐露[†],双震,孙义静

(中国科学院大学数学科学学院, 北京 100049)

(2019 年 5 月 14 日收稿; 2019 年 7 月 4 日收修改稿)

Tang L, Shuang Z, Sun Y J. The properties of positive solutions for strongly singular equations with singular potential [J]. Journal of University of Chinese Academy of Sciences, 2021,38(1):23-28.

摘　要　主要讨论矩阵型强奇异偏微分方程

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(M(x)\nabla u) = |x|^{-\mu} u^{-p} & \text{in } \Omega, \\ u > 0 & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases}$$

其中, $0 \in \Omega$ 是 $\mathbb{R}^n (n \geqslant 3)$ 中具有光滑边界的有界开集, $\boldsymbol{M}(x)$ 是定义在 Ω 上的实对称矩阵, $-3 < -p < -1, -n < -\mu < 0$。对上述方程解的有界性及逼近速度进行研究,得到如下结论:当 $-n < -\mu < -1 - \dfrac{n}{2}$ 时,方程的 H_0^1 解是无界解;当 $\boldsymbol{M}(x) \equiv \boldsymbol{I}$ (单位矩阵), $-\mu < -2$ 时,方程不存在慢速增长的 $C^2(\Omega \backslash \{0\})$ 解。

关键词　奇异位势;强奇性; 实对称矩阵

中图分类号:O175.29　　**文献标志码**:A　　**doi**:10.7523/j.issn.2095-6134.2021.01.003

The properties of positive solutions for strongly singular equations with singular potential

TANG Lu, SHUANG Zhen, SUN Yijing

(*School of Mathematical Sciences, University of Chinese Academy of Sciences, Beijing* 100049, *China*)

Abstract　We discuss the strongly singular equations of matrix-type,

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(M(x)\nabla u) = |x|^{-\mu} u^{-p} & \text{in } \Omega, \\ u > 0 & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases}$$

where Ω is a smooth bounded domain in $\mathbb{R}^n (n \geqslant 3)$ containing the origin, $\boldsymbol{M}(x)$ is a real symmetric matrix on Ω, $-3 < -p < -1$, and $-n < -\mu < 0$. We show that all H_0^1-solutions are unbounded when $-n < -\mu < -1 - \dfrac{n}{2}$ and there exists no solution of slow growth when $\boldsymbol{M}(x) \equiv \boldsymbol{I}$ (identity matrix) and $-\mu < -2$.

* 国家自然科学基金(11971027)资助

† 通信作者,E-mail:tanglu171@mails.ucas.ac.cn

Keywords singular potential; strong singularity; real symmetric matrix

本文研究如下带有奇异位势的矩阵型强奇异偏微分方程

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(M(x)\nabla u)=|x|^{-\mu}u^{-p} & \text{in } \Omega, \\ u>0 & \text{in } \Omega, \\ u=0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1}$$

其中，$0\in\Omega$ 是 $\mathbb{R}^n(n\geqslant 3)$ 中具有光滑边界的有界开集，$\boldsymbol{M}(x)$ 是定义在 Ω 上的实对称矩阵，满足：存在正常数 α,β 使得 $\boldsymbol{M}(x)\xi\cdot\xi\geqslant\alpha|\xi|^2$，$|\det\boldsymbol{M}(x)|\leqslant\beta$，$\forall\xi\in\mathbb{R}^n$，$\forall x\in\Omega$，$-3<-p<-1$，$-n<-\mu<0$。

上述方程的一般形式是 $-\operatorname{div}(\boldsymbol{M}(x)\nabla u)=f(x,u)$。当 $x\to 0$，$f(x,\cdot)\to\infty$ 时，称此类偏微分方程是带有奇异位势的偏微分方程。当 $s\to 0$，$f(\cdot,s)\to\infty$ 时，称此类偏微分方程是具有奇性的偏微分方程。特别地，若有 $s\to 0$，$f(\cdot,s)s\to\infty$ 时，称此类偏微分方程是具有强奇性的偏微分方程。具有奇性的偏微分方程广泛应用于多种物理模型中，比如流体力学中的边界层现象、化学异构催化剂、冰川移动等，详情可参考文献[1-2]。近年来，学者们对这一类型方程做出过一系列研究工作，并得到了相当丰富且深刻的研究成果。Lazer 和 McKenna[3] 对基本形式方程 $-\Delta u=p(x)u^{-p}$ 进行研究，并得到结论：若 $p(x)\in C^{\alpha}(\overline{\Omega})(0<\alpha<1)$，$p(x)>0$，$\forall x\in\overline{\Omega}$，则对 $\forall\ -p<0$，方程存在唯一解 $u_{-p}\in C^{2+\alpha}(\Omega)\cap C^1(\overline{\Omega})$，且若 $-p<-1$，则 $u_{-p}\notin C^1(\overline{\Omega})$，以及 $u_{-p}\in H_0^1(\Omega)$ 当且仅当 $-p>-3$。Boccardo 和 Orsina[4] 首先研究矩阵型奇异偏微分方程，他们指出当 $-p<-1$，非负系数函数 $p(x)\in L^1(\Omega)$ 时，方程存在解 $u\in H^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$，$u^{\frac{p+1}{2}}\in H_0^1(\Omega)$，但不能得到 $u\in H_0^1(\Omega)$。而对于带有奇异位势椭圆型偏微分方程，Bae 和 Pahk[5] 运用 Brezis-Nirenberg[6] 的方法，研究一类带有奇异位势的奇性椭圆型偏微分方程，它的正径向解和节点径向解的存在性取决于方程中指数所属范围。Caldiroli 和 Musina[7-8] 研究在 Sobolev 嵌入中紧性可能缺失的情况下，一类带有奇异位势的二维奇性椭圆型偏微分方程的正解的存在性对所给区域的要求。Ruiz 和 Willem[9] 运用 Palais[10] 的方法，研究一类带有 Sobolev 临界指数和奇异位势的非线性椭圆问题的正解的存在性。

1 本文主要研究成果

众所周知（参见文献[7]），如下问题：

$$\begin{cases} -\Delta u=|x|^{-\mu}u^{q} & \text{in } \Omega, \\ u>0 & \text{in } \Omega, \\ u=0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases}$$

不存在正解，这里 $0\in\Omega$ 是 $\mathbb{R}^n(n\geqslant 2)$ 中的开集，$q>1$，$-\mu\leqslant -2$，也就是说 -2 是正解存在的临界值。而在我们的前期工作[11]中指出，对于带有奇异位势的负指数方程而言，-2 不再是正解存在的临界值。且在文献[12]中证得，当 $-3<-p<-1$，$-n\leqslant-\mu\leqslant 0$ 时，方程(1)存在 $H_0^1(\Omega)$ 正解。本文将进一步研究解的性质：无界性及逼近速度。以下是本文的主要研究成果：

定理 1.1 设 Ω 是 $\mathbb{R}^n(n\geqslant 3)$ 中包含原点的具有光滑边界的有界开集，$\boldsymbol{M}(x)$ 是定义在 Ω 上的实对称矩阵，满足：存在正常数 α,β 使得 $\boldsymbol{M}(x)\xi\cdot\xi\geqslant\alpha|\xi|^2$，$|\det\boldsymbol{M}(x)|\leqslant\beta$，$\forall\xi\in\mathbb{R}^n$，$\forall x\in\Omega$，$-3<-p<-1$，$-n<-\mu<0$，则方程

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(\boldsymbol{M}(x)\nabla u)=|x|^{-\mu}u^{-p} & \text{in } \Omega, \\ u>0 & \text{in } \Omega, \\ u=0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases}$$

存在 $H_0^1(\Omega)$ -解 u_{-p}。

定理 1.2 设 Ω 是 $\mathbb{R}^n(n\geqslant 3)$ 中包含原点的具有光滑边界的有界开集，$\boldsymbol{M}(x)$ 是定义在 Ω 上的实对称矩阵，满足：存在正常数 α,β 使得 $\boldsymbol{M}(x)\xi\cdot\xi\geqslant\alpha|\xi|^2$，$|\det\boldsymbol{M}(x)|\leqslant\beta$，$\forall\xi\in\mathbb{R}^n$，$\forall x\in\Omega$，$-3<-p<-1$，$-n<-\mu<-1-\frac{n}{2}$，则方程 (1) 的任一 H_0^1-解 u 无界，即 $u\notin L^{\infty}(\Omega)$。

定理 1.3 设 Ω 是 $\mathbb{R}^n(n\geqslant 3)$ 中包含原点的具有光滑边界的有界开集，$-3<-p<-1$，如果 $-n<-\mu<-2$，则方程

$$\begin{cases} -\Delta u=|x|^{-\mu}u^{-p} & \text{in } \Omega, \\ u>0 & \text{in } \Omega, \\ u=0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2}$$

对 $\forall\, 0<l<\frac{\mu-2}{p+1}$，$C^2(\Omega\backslash\{0\})$ -解 u 都满足性质：

$$\limsup_{x\to 0}\frac{u(x)}{|x|^{-l}}=+\infty.$$

注：定理 1.1 的证明可参考文献[12]。在定理 1.1 研究的一般问题中，参数 μ 满足 $-n<-\mu<-1-\frac{n}{2}$ 时，得到正解的无界性。而当 $\boldsymbol{M}(x)\equiv\boldsymbol{I}$，参数 μ 满足 $-n<-\mu<-2$ 时，正解就会是无界解，具体可参考文献[11]（Theorem 1.3）。

定义 $H_0^1(\Omega)$ 中范数为

$$\|u\|=\left(\int_\Omega|\nabla u|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}},\ \forall u\in H_0^1(\Omega),$$

称 u 是方程(1)的 $H_0^1(\Omega)$ -解，如果 $u\in H_0^1(\Omega)$，$u>0$ a.e. in Ω，满足 $\forall\varphi\in H_0^1(\Omega)$，

$$\int_\Omega\boldsymbol{M}(x)\nabla u\cdot\nabla\varphi\mathrm{d}x-\int_\Omega|x|^{-\mu}u^{-p}\cdot\varphi\mathrm{d}x=0.$$

2　定理 1.2 的证明

用反证法证明。假设 $u\in L^\infty(\Omega)$，即 $\operatorname*{ess\,sup}_\Omega u<+\infty$，且设 δ 为充分小的正数，$B_{2\delta}(0)$ 是以原点为球心，以 2δ 为半径包含在 Ω 里的闭球。构造截断函数 ϕ_δ，满足条件：$\phi_\delta\in C_0^\infty(\Omega)$，在 $\Omega_0=B_{2\delta}(0)\backslash B_\delta(0)$ 内，$0\leqslant\phi_\delta\leqslant1$，在 $\Omega_1=B_{\frac{5}{3}\delta}(0)\backslash B_{\frac{4}{3}\delta}(0)$ 内，$\phi_\delta\equiv1$，在 $\Omega\backslash\Omega_0$ 内，$\phi_\delta\equiv0$，且

$$|D^\beta\phi_\delta|\leqslant\frac{c(n,|\beta|)}{\delta^{|\beta|}},$$

其中 $\beta=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)$ 为多元指标，$|\beta|=\beta_1+\cdots+\beta_n$，$c(n,|\beta|)$ 是与 n,β 有关的正参数，特别地，

$$|\nabla\phi_\delta|\leqslant\frac{c(n)}{\delta}.$$

由于 u 是方程（1）的解，有

$$\int_\Omega\boldsymbol{M}(x)\nabla u\cdot\nabla\varphi_\delta\mathrm{d}x=\int_\Omega|x|^{-\mu}u^{-p}\phi_\delta\mathrm{d}x.\quad(3)$$

由 $|\boldsymbol{M}(x)\xi\cdot\gamma|\leqslant\frac{\beta}{\alpha^{n-1}}|\xi||\gamma|,\ \forall x\in\Omega,\ \forall\xi,\gamma\in\mathbb{R}^n$（证明可参考文献[12]中引理 1），估计(3)左边值，有

$$\begin{aligned}\int_\Omega\boldsymbol{M}(x)\nabla u\cdot\nabla\phi_\delta\mathrm{d}x&\leqslant\frac{\beta}{\alpha^{n-1}}\int_\Omega|\nabla u|\cdot|\nabla\phi_\delta|\ \mathrm{d}x\\&\leqslant\frac{\beta}{\alpha^{n-1}}\cdot\frac{c(n)}{\delta}\int_{\Omega_0}|\nabla u|\ \mathrm{d}x\\&\leqslant\frac{\beta}{\alpha^{n-1}}\cdot\frac{c(n)}{\delta}\left(\int_{\Omega_0}\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\\&\quad\left(\int_{\Omega_0}|\nabla u|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\\&=c_1\delta^{\frac{n}{2}-1}\left(\int_{\Omega_0}|\nabla u|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}},\end{aligned}$$

其中 c_1 是与 α,β,n 有关、与 δ 无关的正数值。估计(3)右边值，有

$$\begin{aligned}\int_\Omega|x|^{-\mu}u^{-p}\phi_\delta\mathrm{d}x&\geqslant\int_{\Omega_1}|x|^{-\mu}u^{-p}\mathrm{d}x\\&\geqslant(\operatorname*{ess\,sup}_\Omega u)^{-p}\int_{\Omega_1}|x|^{-\mu}\mathrm{d}x\\&=(\operatorname*{ess\,sup}_\Omega u)^{-p}c_2\delta^{n-\mu},\end{aligned}$$

其中 c_2 是与 α,β,n 有关、与 δ 无关的正数值。于是得到

$$c_1\delta^{\frac{n}{2}-1}\left(\int_{\Omega_0}|\nabla u|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\geqslant(\operatorname*{ess\,sup}_\Omega u)^{-p}c_2\delta^{n-\mu},$$

即

$$\begin{aligned}c_1\|u\|(\operatorname*{ess\,sup}_\Omega u)^p&\geqslant c_2\delta^{n-\mu-\frac{n}{2}+1}\\&=c_2\delta^{\frac{n}{2}+1-\mu},\ \forall 0<\mu<n.\end{aligned}$$

当 $-\mu<-\frac{n}{2}-1$ 时，随着 $\delta\to0$，上式右边 $\to+\infty$，左边为有限数，产生矛盾，因此有结论：当 $-n<-\mu<-\frac{n}{2}-1$ 时，方程(1)的解无界，而且是当 $|x|\to0$ 时，解 u 是无界的。

3　定理 1.3 的证明

用反证法证明。假设方程(2)的 $C^2(\Omega\backslash\{0\})$ -解 u 不满足性质

$$\limsup_{x\to0}\frac{u(x)}{|x|^{-l}}=+\infty,\ \forall 0<l<\frac{\mu-2}{p+1}.$$

则存在 $l\in\left(0,\frac{\mu-2}{p+1}\right)$，对以 r（充分小）为半径、以 0 为圆心的闭球 $B_r(0)\subset\Omega$，有 $u(x)\leqslant c|x|^{-l},\ \forall x\in B_r(0)$，$c$ 为某一正常数。由解 $u\in C^2(\Omega\backslash\{0\})$，知道

$$-\Delta u\equiv|x|^{-\mu}u^{-p},\ \forall x\in\Omega\backslash\{0\}.\quad(4)$$

令 $R=r^{2-n}$，定义区域

$$\Omega(t)=\{x\in B_r(0):t^{\frac{1}{2-n}}\leqslant|x|\leqslant r\},$$

$$\Gamma(t)=\{x\in B_r(0):|x|=t^{\frac{1}{2-n}}\},$$

其中 $t\in(R,+\infty)$. 取 $\Omega(t)$ 的外侧为正向，$\boldsymbol{n}$ 表示 $\partial\Omega(t)$ 的单位外法向量，即在边界 $\Gamma(R)$ 中，$\boldsymbol{n}$ 是指向背离原点方向的单位法向量，在边界 $\Gamma(t)$ 中，$\boldsymbol{n}$ 是指向原点方向的单位法向量。令 $\Gamma(t)$ 上的点 x 的参数表达式为 $x=(x_1,\cdots,x_n)=(t^{\frac{1}{2-n}}\cos\theta_1,t^{\frac{1}{2-n}}\sin\theta_1\cos\theta_2,\cdots,t^{\frac{1}{2-n}}\sin\theta_1\cdots\cos\theta_{n-1},t^{\frac{1}{2-n}}\sin\theta_1\cdots\sin\theta_{n-1})$，其中，$t,\theta_1,\cdots,\theta_{n-1}$ 为参数，0

$\leqslant \theta_i < \pi, i=1,\cdots,n-2, 0 \leqslant \theta_{n-1} < 2\pi$。则在 $\Gamma(t)$ 中,有

$$\boldsymbol{n} = (-\cos\theta_1,\cdots,-\sin\theta_1\cdots\sin\theta_{n-1}) = -\frac{x}{|x|},$$

$$x(t,\theta_1,\cdots,\theta_{n-1})\cdot\boldsymbol{n} = -t^{\frac{1}{2-n}} = -|x|.$$

考虑函数 $g(x)=\dfrac{1}{n-2}|x|^{2-n}, x\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$, 易知 $g(x)\in C^\infty(\Omega(t))$, 且有

$$\begin{aligned}\nabla g(x) &= (-x_1|x|^{-n},\cdots,-x_n|x|^{-n})\\ &= -x|x|^{-n}, \forall x\in\Omega(t),\\ |\nabla g(x)| &= |x|^{1-n}, \forall x\in\Omega(t),\\ \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{n}} &= \nabla g\cdot\boldsymbol{n} = |x|^{-n}(-x)\cdot\boldsymbol{n}\\ &= |x|^{1-n} = |\nabla g|, \forall x\in\Gamma(t),\\ \Delta g(x) &= 0, \forall x\in\Omega(t).\end{aligned}$$

由格林恒等式,有

$$\int_{\Omega(t)}\nabla u\cdot\nabla g\,\mathrm{d}x + \int_{\Omega(t)}u\Delta g\,\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega(t)}u\frac{\partial g}{\partial\boldsymbol{n}}\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma},$$

即

$$\begin{aligned}\int_{\Omega(t)}\nabla u\cdot\nabla g\,\mathrm{d}x &= \int_{\partial\Omega(t)}u\frac{\partial g}{\partial\boldsymbol{n}}\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}\\ &= \int_{\Gamma(R)}u\frac{\partial g}{\partial\boldsymbol{n}}\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} + \int_{\Gamma(t)}u|\nabla g|\,\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}.\end{aligned}$$

其中 $\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}$ 表示 $\partial\Omega(t)$ 中的 $n-1$ 维单位面积元。令 $A(t)=\int_{\Gamma(t)}u|\nabla g|\,\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}$, 则

$$A(t) = \int_{\Omega(t)}\nabla u\cdot\nabla g\,\mathrm{d}x - \int_{\Gamma(R)}u\frac{\partial g}{\partial\boldsymbol{n}}\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}.$$

计算 $A(t)$ 的一阶导数,

$$\begin{aligned}A'(t) &= \frac{\mathrm{d}A(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\Omega(t)}\nabla u\cdot\nabla g\,\mathrm{d}x\\ &= \int_{\partial\Omega(t)}(\nabla u\cdot\nabla g)\left(\frac{\partial x(t,\theta_1,\cdots,\theta_{n-1})}{\partial t}\cdot\boldsymbol{n}\right)\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}\\ &= \int_{\Gamma(t)}(\nabla u\cdot\nabla g)\left(\frac{\partial x(t,\theta_1,\cdots,\theta_{n-1})}{\partial t}\cdot\boldsymbol{n}\right)\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma},\end{aligned}$$

在 $\Gamma(t)$ 中,有

$$\begin{aligned}&\frac{\partial x(t,\theta_1,\cdots,\theta_{n-1})}{\partial t}\\ &= \left(\frac{1}{2-n}t^{\frac{n-1}{2-n}}\cos\theta_1,\cdots,\frac{1}{2-n}t^{\frac{n-1}{2-n}}\sin\theta_1\cdots\sin\theta_{n-1}\right),\end{aligned}$$

$$\boldsymbol{n}\cdot\frac{\partial x(t,\theta_1,\cdots,\theta_{n-1})}{\partial t} = \frac{1}{n-2}t^{\frac{n-1}{2-n}}.$$

则

$$\begin{aligned}A'(t) &= \frac{1}{n-2}t^{\frac{n-1}{2-n}}\int_{\Gamma(t)}(\nabla u\cdot\nabla g)\,\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}\\ &= \frac{1}{n-2}t^{\frac{n-1}{2-n}}\int_{\Gamma(t)}-|x|^{-n}x\cdot\nabla u\,\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}\\ &= \frac{1}{n-2}\int_{\Gamma(t)}-\frac{x}{|x|}\cdot\nabla u\,\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}\\ &= \frac{1}{n-2}\int_{\Gamma(t)}\boldsymbol{n}\cdot\nabla u\,\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}\\ &= \frac{1}{n-2}\int_{\Gamma(t)}\frac{\partial u}{\partial\boldsymbol{n}}\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}\\ &= \frac{1}{n-2}\left(\int_{\Omega(t)}\Delta u\,\mathrm{d}x - \int_{\Gamma(R)}\frac{\partial u}{\partial\boldsymbol{n}}\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}\right).\end{aligned}$$

上述等式最后一步根据散度定理而来。计算 $A(t)$ 的二阶导数,有

$$\begin{aligned}A''(t) &= \frac{1}{n-2}\int_{\partial\Omega(t)}\Delta u\cdot\left(\frac{\partial x(t,\theta_1,\cdots,\theta_{n-1})}{\partial t}\cdot\boldsymbol{n}\right)\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{n-2}\int_{\Gamma(t)}\Delta u\cdot\frac{1}{n-2}t^{\frac{n-1}{2-n}}\mathrm{d}x\\ &= \left(\frac{1}{n-2}\right)^2 t^{\frac{n-1}{2-n}}\int_{\Gamma(t)}\Delta u\,\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}.\end{aligned}$$

再根据对解 u 的假设, $u(x)\leqslant c|x|^{-l}, \forall x\in B_R(0), l\in\left(0,\dfrac{\mu-2}{p+1}\right)$ 和式(4), 以及关系式

$$\begin{aligned}|\Gamma(t)| &= \int_{\Gamma(t)}\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}\\ &\leqslant \left(\int_{\Gamma(t)}u^{\frac{p}{1+p}\cdot\frac{1+p}{p}}\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}\right)^{\frac{p}{p+1}}\left(\int_{\Gamma(t)}u^{\frac{-p}{1+p}\cdot(1+p)}\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}\right)^{\frac{1}{p+1}}\\ &= \left(\int_{\Gamma(t)}u\,\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}\right)^{\frac{p}{1+p}}\left(\int_{\Gamma(t)}u^{-p}\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}\right)^{\frac{1}{1+p}},\\ &\Rightarrow \int_{\Gamma(t)}u^{-p}\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} \geqslant |\Gamma(t)|^{1+p}\left(\int_{\Gamma(t)}u\,\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}\right)^{-p},\end{aligned}$$

我们来估算 $A(t), A''(t)$。

$$\begin{aligned}A(t) &= \int_{\Gamma(t)}u|\nabla g|\,\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} = \int_{\Gamma(t)}u|x|^{1-n}\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}\\ &\leqslant c\int_{\Gamma(t)}|x|^{1-n-l}\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}\\ &= c\cdot t^{\frac{1-n-l}{2-n}}|\Gamma(t)| = d_1 t^{\frac{-l}{2-n}},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}A''(t) &= \left(\frac{1}{n-2}\right)^2 t^{\frac{n-1}{2-n}}\int_{\Gamma(t)}\Delta u\,\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}\\ &= -\left(\frac{1}{n-2}\right)^2 t^{\frac{n-1}{2-n}}\int_{\Gamma(t)}|x|^{-\mu}u^{-p}\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}\\ &= -\left(\frac{1}{n-2}\right)^2 t^{\frac{n-1-\mu}{2-n}}\int_{\Gamma(t)}u^{-p}\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}\\ &\leqslant -\left(\frac{1}{n-2}\right)^2 t^{\frac{n-1-\mu}{2-n}}|\Gamma(t)|^{1+p}\left(\int_{\Gamma(t)}u\,\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}\right)^{-p}\\ &= -d_2\cdot t^{\frac{n-1-\mu+(n-1)(1+p)}{2-n}}\left(\int_{\Gamma(t)}u\,\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}\right)^{-p}\\ &= -d_2\cdot t^{\frac{n-1-\mu+(n-1)(1+p)+(1-n)p}{2-n}}.\end{aligned}$$

$$\left(\int_{\Gamma(t)} u|x|^{1-n}\mathrm{d}\sigma\right)^{-p}$$
$$=-d_2\cdot t^{\frac{2(n-1)-\mu}{2-n}}A(t)^{-p}\leqslant -d_3\cdot t^{\frac{2(n-1)-\mu+lp}{2-n}},$$

其中 d_1,d_2,d_3 是与 n,μ,p 有关、与 t 无关的正数值。从而,得到关系式

$$A(t)\leqslant d_1 t^{\frac{-l}{2-n}},\tag{5}$$

$$A'(t)=\frac{1}{n-2}\int_{\Gamma(t)}\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\mathrm{d}\sigma,\tag{6}$$

$$A''(t)\leqslant -d_2\cdot t^{\frac{2(n-1)-\mu}{2-n}}A(t)^{-p}\leqslant -d_3\cdot t^{\frac{2(n-1)-\mu+lp}{2-n}}.\tag{7}$$

下面分析当 $t\to\infty$, $A(t),A'(t),A''(t)$ 可能出现的情况。由 $A''(t)<0$, 可知 $A'(t)$ 单减:

(Ⅰ)若存在 $t_1>0$, 使得当 $t>t_1$ 时, $A'(t)\leqslant A'(t_1)<0$, 则 $A(t)$ 单减,又 $A(t)>0$, 则在区间 $[t_1,+\infty)$, 函数 $A(t)$ 存在最大值 M_2, $0<M_1<+\infty$。对 $\forall t>0$, $\frac{2M_1}{t}\geqslant\frac{A(t+t_0)-A(t_0)}{t}=A'(\xi_t)\geqslant\frac{-2M_1}{t}$, $\xi_t\in[t_0,t_0+t]$。当 $t\to+\infty$, 有序列 $A'(\xi_t)\to 0$, 产生矛盾。因此,这种情况不成立。

(Ⅱ)若 $\forall t>0$, 有 $A'(t)\geqslant 0$, 则 $A(t)$ 单增, $\lim\limits_{t\to+\infty}A(t)=+\infty$ 或 $\lim\limits_{t\to+\infty}A(t)=M_2>0$。若 $\lim\limits_{t\to+\infty}A(t)=M_2$, 则 $\forall\epsilon>0$, 存在 t 充分大时,有 $0<A(2t)-A(t)<\epsilon$, 从而 $0<\frac{A(2t)-A(t)}{t}=A'(\eta_t)<\frac{\epsilon}{t}$, $\eta_t\in[t,2t]$, 则 $\lim\limits_{t\to+\infty}A'(\eta_t)=0$, 又由 $A'(t)$ 单减,也就有 $\lim\limits_{t\to+\infty}A'(t)=0$。

定义函数 $F(t)$

$$F(t)=\int_{A(R)}^{A(t)}s^{-\gamma}\mathrm{d}s=\frac{1}{\gamma-1}[A(R)^{1-\gamma}-A(t)^{1-\gamma}],$$

其中 $t\in[R,+\infty)$, $\gamma=\frac{\mu-2}{l}-p>1$。计算 $F(t)$ 的一阶导数及二阶导数,有

$$F'(t)=A(t)^{-\gamma}\cdot A'(t),$$
$$F''(t)=A(t)^{-\gamma}A''(t)-\gamma A(t)^{-\gamma-1}A'(t).$$

已知 $A'(t)\geqslant 0$, 且由式(5),有

$$A(t)^{-p-\gamma}\geqslant(d_1 t^{\frac{-l}{2-n}})^{-p-\gamma}=d_1^{-p-\gamma}t^{\frac{l(p+\gamma)}{2-n}},$$
$$-A(t)^{-p-\gamma}\leqslant -d_1^{-p-\gamma}t^{\frac{l(p+\gamma)}{2-n}}.$$

再结合式(7)和 $\gamma=\frac{\mu-2}{l}-p$, 估计 $F''(t)$, 有

$$F''(t)\leqslant A(t)^{-\gamma}A''(t)$$
$$\leqslant -d_2\cdot t^{\frac{2(n-1)-\mu}{2-n}}A(t)^{-p-\gamma}$$
$$\leqslant -d_4 t^{\frac{2(n-1)-\mu+l(\gamma+p)}{2-n}}=-d_4t^{-2},$$

其中 d_4 是与 n,μ,p 有关、与 t 无关的正数值。从对 $A(t),A'(t),A''(t)$ 的分析,可知 $F'(t)\geqslant 0$, $\forall t>0$, 且单减,则 $\lim\limits_{t\to+\infty}F'(t)=M_3$, $0\leqslant M_3<+\infty$, 且根据情况(Ⅱ), $\lim\limits_{t\to+\infty}A(t)=+\infty$, 且 $0\leqslant\lim\limits_{t\to+\infty}A'(t)<+\infty$, 或者 $0<\lim\limits_{t\to+\infty}A(t)<+\infty$, 且 $\lim\limits_{t\to+\infty}A'(t)=0$, 则 $\lim\limits_{t\to+\infty}F(t)=\lim\limits_{t\to+\infty}A(t)^{-\gamma}\cdot A'(t)=0$。

考虑函数 $sF''(s)$, $s\in[R,t]$, 它的积分满足

$$\int_R^t sF''(s)\mathrm{d}s=tF'(t)-RF'(R)-F(t)+F(R)$$
$$\leqslant\int_R^t -d_4s^{-1}\mathrm{d}s=-d_4(\ln t-\ln R),$$

则有

$$-RF'(R)-F(t)\leqslant -d_4(\ln t-\ln R).$$

当 $t\to+\infty$, 不等式左边极限为有限数, 而右边趋于 $-\infty$, 产生矛盾,从而定理成立,即对 $\forall 0<l<\frac{\mu-2}{p+1}$, 方程(2)的 $C^2(\Omega\backslash\{0\})$ -解 u 都满足性质

$$\limsup_{x\to 0}\frac{u(x)}{|x|^{-l}}=+\infty.$$

参考文献

[1] Callegari A, Nachman A. Some singular nonlinear differential equations arising in boundary layer theory[J]. J Math Anal Appl, 1978, 64(1):96-105.

[2] Callegari A, Nachman A. A nonlinear singular boundary value problem in the thoery of pseudoplastic fluids[J]. SIAM J Appl Math, 1980, 38(2):275-281.

[3] Lazer A C, McKenna P J. On a singular nonlinear elliptic boundary value problem[J]. Proc Am Math Soc, 1991, 111(3):721-730.

[4] Boccardo L, Orsina L. Semilinear elliptic equations with singular nonlinearities[J]. Calc Var, 2010, 37(3):363-380.

[5] Bae S, Pahk D H. Elliptic boundary value problems with singular coefficients in nonlinear terms[J]. Nonlinear Funct Anal Appl, 1998, 3:59-75.

[6] Brezis H, Nirenberg L. Positive solutions of nonlinear equations involving critical Sobolev exponents[J]. Comm Pure Appl Math, 1983, 36(4):437-477.

[7] Caldiroli P, Musina R. On a class of two-dimensional singular elliptic problems[J]. Proc Roy Soc Edinburgh, 2001, 131

(3):479-497.

[8] Caldiroli P, Musina R. Stationary states for a two-dimensional singular Schrödinger equation [J]. Boll Unione Mat Ital, 2001, 4(3):609-633.

[9] Ruiz D, Willem M. Elliptic problems with critical exponents and Hardy potentials [J]. J Differential Equations, 2003, 190(2):524-538.

[10] Palais R S. The principle of symmetric criticality [J]. Comm Math Phys, 1979, 69(1):19-30.

[11] Sun Y J, Tan Y X. Kirchhoff type equations with strong singularities [J]. Comm Pure Appl Anal, 2019, 18(1):181-193.

[12] 双震,孙义静. 一类具有强奇性的矩阵型偏微分方程的正解的存在性[J]. 中国科学院大学学报,2019, 36(3):311-319.

[13] Caldiroli P, Malchiodi A. Singular elliptic problems with critical growth [J]. Comm Partial Differential Equations, 2002, 27(5/6):847-876.

[14] Kristály A, Varga C. Multiple solutions for elliptic problems with singular and sublinear potentials [J]. Proc Amer Math Soc, 2007, 135(7):2121-2126.

[15] Sun Y J. Compatibility phenomena in singular problems [J]. Proc Roy Soc Edinburgh, 2013, 143(6):1321-1330.