

对 $K_2(\mathbb{Z}_4 C_{2^r})$ 结构的估计*

邓文超[†], 唐国平

(中国科学院大学数学科学学院, 北京 100049)

(2021 年 4 月 27 日收稿; 2021 年 5 月 12 日收修改稿)

Deng W C, Tang G P. Estimation of the structure of $K_2(\mathbb{Z}_4 C_{2^r})$ [J]. Journal of University of Chinese Academy of Sciences, 2023, 40(4): 453-455. DOI: 10. 7523/j.ucas. 2021. 0043.

摘要 由张亚坤和唐国平 2018 年的论文(张亚坤, 唐国平. 一类特殊有限群环的 K_2 -群, 中国科学院大学学报)得 $K_2(\mathbb{Z}_4 C_2) = (C_2)^2, K_2(\mathbb{Z}_4 C_4) = (C_2)^3$ 。借助相对 K_2 群, 通过计算 Dennis-Stein 符号给出 $K_2(\mathbb{Z}_4 C_{2^r})$ 的一组简化的生成元, 在此基础上给出 $K_2(\mathbb{Z}_4 C_2)$ 和 $K_2(\mathbb{Z}_4 C_4)$ 的基底, 并得到 $K_2(\mathbb{Z}_4 C_8) = (C_2)^k, 3 \leq k \leq 5, K_2(\mathbb{Z}_4 C_{2^r}) = (C_2)^l, l \leq 2^{r-1} + 1$ 。

关键词 K_2 群; 群环; Dennis-Stein 符号

中图分类号: O154.3 文献标志码: A DOI: 10. 7523/j.ucas. 2021. 0043

Estimation of the structure of $K_2(\mathbb{Z}_4 C_{2^r})$

DENG Wenchao, TANG Guoping

(School of Mathematical Sciences, University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China)

Abstract We already know $K_2(\mathbb{Z}_4 C_2) = (C_2)^2, K_2(\mathbb{Z}_4 C_4) = (C_2)^3$ from a paper of Zhang Yakun and Tang Guoping (K_2 for a kind of special finite group rings). In this paper, we got a set of simplified generators of $K_2(\mathbb{Z}_4 C_{2^r})$ by calculating Dennis-Stein symbol in relative K_2 group. Then we got the basis for $K_2(\mathbb{Z}_4 C_2)$ and $K_2(\mathbb{Z}_4 C_4)$, and we got to know $K_2(\mathbb{Z}_4 C_8) = (C_2)^k, 3 \leq k \leq 5, K_2(\mathbb{Z}_4 C_{2^r}) = (C_2)^l, l \leq 2^{r-1} + 1$ 。

Keywords K_2 group; group ring; Dennis-Stein symbol

对有限交换 p 群 G , 文献[1]给出的 $K_2(\mathbb{Z}_p G)$ 的结构与 $K_2(\mathbb{Z}G)$ 有密切联系, 而整群环的 K_2 群的结构在拓扑中有重要意义, 具体可参看文献[2]。本文进一步考虑 $K_2(\mathbb{Z}_p G)$ 。通过计算 Dennis-Stein 符号得到 $K_2(\mathbb{Z}_4 C_{2^r})$ 的一组简化的生成元, 用以估计其具体结构。

1 环的 K_2 群

设 R 是有单位元的交换环, $n \geq 3$, Steinberg

群 $St(n, R)$ 由符号 $x_{ij}(a) (a \in R, 1 \leq i \neq j \leq n)$ 模掉如下关系后生成:

$$x_{ij}(a)x_{ij}(b) = x_{ij}(a+b),$$

$$[x_{ij}(a), x_{kl}(b)] = \begin{cases} 1, & \text{若 } j \neq k, i \neq l, \\ x_{il}(ab), & \text{若 } j = k, i \neq l. \end{cases}$$

其中, $[x, y] = xyx^{-1}y^{-1}$ 。

有映射 $\phi_n: St(n, R) \rightarrow E(n, R), x_{ij}(r) \mapsto e_{ij}(r)$, 令 $St(R) = \varinjlim St(n, R), E(R) = \varinjlim E(n, R)$, 则有

* 国家自然科学基金(11771422)资助

[†] 通信作者, E-mail: dengwenchao18@mails.ucas.ac.cn

$\phi = \lim_{\rightarrow} \phi_n: St(R) \rightarrow E(R)$ 。定义 $K_2(R) = \text{Ker}(\phi)$ ，则有正合列 $1 \rightarrow K_2(R) \rightarrow St(R) \xrightarrow{\phi} E(R) \rightarrow 1$ 。

$St(R)$ 是 $E(R)$ 的泛中心扩张, $K_2(R)$ 恰好是 $St(R)$ 的中心。

关于 K_2 群更详细的内容可参看文献[3]。

2 相对 K_2 群

设 R 是有单位元的交换环, I 是 R 的理想, $(a, b) \in R \times I \cup I \times R$, 且 $1 - ab \in R^\times$, 则 $\text{Ker}(K_2(R) \rightarrow K_2(R/I))$ 中含有元素

$$\begin{aligned} \langle a, b \rangle_* &:= x_{21}(-b(1-ab)^{-1})x_{12}(-a) \cdot \\ &x_{21}(b)x_{12}(a(1-ab)^{-1})h_{12}(1-ab)^{-1}. \end{aligned}$$

其中, $h_{12}(u) = x_{12}(u)x_{21}(-u^{-1})x_{12}(u)x_{12}(-1)x_{21}(1)x_{12}(-1)$, 这种类型的元素满足如下关系式

$$\begin{aligned} \langle a, b \rangle_* + \langle b, a \rangle_* &= 0, \\ \langle a, b \rangle_* + \langle a, c \rangle_* &= \langle a, b + c - abc \rangle_*, \\ \langle a, bc \rangle_* &= \langle ab, c \rangle_* + \langle ac, b \rangle_*. \end{aligned}$$

相对 K_2 群可给出正合列 $K_2(R, I) \rightarrow K_2(R) \rightarrow K_2(R/I)$, 但是定义比较复杂, 可参看文献[4]。

对根理想的情形, $K_2(R, I)$ 有较为简单的表示。

定理 2.1 (参看文献[4]) 设 R 是有单位元的交换环, I 是包含在 R 的 Jacobson 根中的理想, 则 $K_2(R, I)$ 作为交换群可由 Dennis-Stein 符号 $\langle a, b \rangle, (a, b) \in R \times I \cup I \times R$ 生成, 并且恰好满足关系:

$$\begin{aligned} \text{(DS1)} \quad &\langle a, b \rangle + \langle b, a \rangle = 0, \\ \text{(DS2)} \quad &\langle a, b \rangle + \langle a, c \rangle = \langle a, b + c - abc \rangle, \\ \text{(DS3)} \quad &\langle a, bc \rangle = \langle ab, c \rangle + \langle ac, b \rangle. \end{aligned}$$

由上述的关系易得

$$\langle a, 1 \rangle = \langle 1, a \rangle = 0, \langle a, 0 \rangle = \langle 0, a \rangle = 0,$$

若 $a \in I$ 或 $b, c \in I$, 由 (DS2) 可得

$$\begin{aligned} \langle a, b + c \rangle &= \langle a, b \rangle + \langle a, c \rangle + \\ &\langle a, [1 - (b + c - abc)a]^{-1}abc \rangle, \end{aligned}$$

类似地, 若 $a, b \in I$ 或 $c \in I$, 有

$$\begin{aligned} \langle a + b, c \rangle &= \langle a, c \rangle + \langle b, c \rangle + \\ &\langle [1 - (a + b - abc)c]^{-1}abc, c \rangle. \end{aligned}$$

以下设 $R = \mathbb{Z}_4 C_{2^r}, \sigma$ 为 C_{2^r} 的生成元, 并设 $a = \sigma - 1$, 则 R 是交换局部环, 其 Jacobson 根是 $(2, a)$, 并且由定理 2.1 得 $K_2(R, (2))$ 具有生成元 $\langle x, 2y \rangle, x, y \in R$ 。

定理 2.2 (参看文献[4]) $K_2(R, (2)) \rightarrow$

$K_2(R), \langle x, 2y \rangle \mapsto \langle x, 2y \rangle_*, x, y \in R$ 为满同态。

证明 在正合列 $K_2(R, (2)) \rightarrow K_2(R) \rightarrow K_2(R/(2))$ 中, $K_2(R/(2)) = K_2(\mathbb{Z}_2 C_{2^r}) = 0$ 。□

通过计算, 可以进一步得到 $K_2(R, (2))$ 的一组简化的生成元。

引理 2.1 对 $\forall s \geq 1$

$$\begin{aligned} \binom{2^s}{2^{s-1}} &\equiv 2 \pmod{4}, \\ \binom{2^s}{n} &\equiv 0 \pmod{4}, n \neq 0, 2^{s-1}, 2^s. \end{aligned}$$

证明 注意对任意素数 $p, p^{s-k} \parallel \binom{p^s}{n}$, 其中 $p^k \parallel n$ 。□

注记 2.1 在 $R = \mathbb{Z}_4 C_{2^r}$ 中, $\sigma^{2^r} = 1$, 由二项式定理即得

$$\begin{aligned} a^{2^r} &= (\sigma - 1)^{2^r} = \sigma^{2^r} + 2\sigma^{2^r-1} + 1 = \\ &1 + 2\sigma^{2^r-1} + 1 = 2(\sigma^{2^r-1} + 1) = \\ &2(\sigma^{2^{r-1}} + 2\sigma^{2^{(r-1)-1}} + 1) = 2a^{2^{r-1}} \quad (r > 1), \end{aligned}$$

注意 $a^{2^r} = 2a^{2^{r-1}}$ 在 $r = 1$ 时也成立。

$$\begin{aligned} 2a^{2^r} &= 2 \cdot 2a^{2^{r-1}} = 0, \\ a^{3 \cdot 2^{r-1}} &= a^{2^r+2^{r-1}} = a^{2^r} a^{2^{r-1}} = 2a^{2^{r-1}} a^{2^{r-1}} = 2a^{2^r} = 0. \end{aligned}$$

这个注记是化简生成元的关键。

定理 2.3 $K_2(R, (2))$ 是初等 2 群, 可由 $\langle 2, 2 \rangle, \langle a, 2 \rangle, \langle a, 2a \rangle, \langle a, 2a^2 \rangle, \dots, \langle a, 2a^{2^{r-1}} \rangle$ 生成。

证明 对任一生成元,

$$\begin{aligned} \langle x, 2y \rangle + \langle x, 2y \rangle &= \langle x, 2y + 2y - x \cdot 2y \cdot 2y \rangle = \\ &\langle x, 0 \rangle = 0, \end{aligned}$$

故 $K_2(R, (2))$ 中都是 2 阶元, 即是初等 2 群。下设 $x_1, x_2, y_1, y_2, x, y \in R$,

$$\begin{aligned} \langle x_1 + x_2, 2y \rangle &= \langle x_1, 2y \rangle + \langle x_2, 2y \rangle + \\ &\langle [1 - (x_1 + x_2 - x_1x_2 \cdot 2y) \cdot 2y]^{-1}x_1x_2 \cdot \\ &2y, 2y \rangle = \langle x_1, 2y \rangle + \langle x_2, 2y \rangle + \\ &\langle 2[1 - (x_1 + x_2)2y]^{-1}x_1x_2y^2, 2 \rangle, \\ \langle 2y, 2 \rangle &= \langle 2y, 1 + 1 \rangle = \langle 2y, 1 \rangle + \langle 2y, 1 \rangle + \\ &\langle 2y, [1 - (1 + 1 - 2y)2y]^{-1}2y \rangle = \\ \langle 2y, 2y \rangle &= \langle 2y^2, 2 \rangle + \langle 4y, y \rangle = \\ \langle 2y^2, 2 \rangle &= \langle 2y^4, 2 \rangle = \dots = \langle 2y^{2^r}, 2 \rangle, \end{aligned}$$

设 $y = a_0 + xa$, 则由引理 2.1 和注记 2.1 得

$$\begin{aligned} 2y^{2^r} &= 2(a_0 + xa)^{2^r} = \\ &2(a_0^{2^r} + 2a_0^{2^r-1}(xa)^{2^{r-1}} + (xa)^{2^r}) = 2a_0^{2^r}, \end{aligned}$$

故 $\langle 2y, 2 \rangle = \langle 2a_0^{2^r}, 2 \rangle = \langle 2, 2 \rangle$ 。

R 有加法生成元 $1, a, a^2, \dots, a^{2^r-1}$, 故拆解后得 $K_2(R, (2))$ 的生成元 $\langle 2, 2 \rangle, \langle a^i, 2y \rangle, i = 1, \dots, 2^r - 1$, 而 $i > 1$ 时, $\langle a^i, 2y \rangle = \langle a^{i-1}, 2ay \rangle + \langle a, 2a^{i-1}y \rangle$, 故可再简化生成元为 $\langle 2, 2 \rangle, \langle a, 2y \rangle$ 。又

$$\begin{aligned}\langle a, 2(y_1 + y_2) \rangle &= \langle a, 2y_1 \rangle + \langle a, 2y_2 \rangle + \\ \langle a, [1 - (2y_1 + 2y_2 - 2y_1 \cdot 2y_2 \cdot a)a]^{-1} 2y_1 \cdot \\ 2y_2 \cdot a \rangle &= \langle a, 2y_1 \rangle + \langle a, 2y_2 \rangle,\end{aligned}$$

于是,再拆解后可得生成元: $\langle 2, 2 \rangle, \langle a, 2 \rangle, \langle a, 2a \rangle, \langle a, 2a^2 \rangle, \langle a, 2a^3 \rangle, \dots, \langle a, 2a^{2^r-1} \rangle$ 。□

那么,结合定理 2.2 即得 $K_2(R)$ 具有生成元 $\langle 2, 2 \rangle_*, \langle a, 2 \rangle_*, \langle a, 2a \rangle_*, \langle a, 2a^2 \rangle_*, \langle a, 2a^3 \rangle_*, \dots, \langle a, 2a^{2^r-1} \rangle_*$ 。

借助注记 2.1, 可进一步减少 $K_2(R)$ 的生成元。

引理 2.2 若 x 是环 R 中的幂零元(设 $x^n = 0$), 则 $(1 - x)^{-1} = 1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1}$ 。

定理 2.4 在 $K_2(R)$ 中, $\langle a, 2a^k \rangle_* = 0, \forall k \geq 2^{r-1}$, 故 $K_2(R)$ 可由 $\langle 2, 2 \rangle_*, \langle a, 2 \rangle_*, \langle a, 2a \rangle_*, \dots, \langle a, 2a^{2^{r-1}-1} \rangle_*$ 生成, 于是 $K_2(R) = (C_2)^l, l \leq 2^{r-1} + 1$ 。

证明 $\langle a, 2a^k \rangle_* = 2\langle a, a^k \rangle_* + \langle a, [1 - (2a^k - a \cdot a^k \cdot a^k)a]^{-1} a \cdot a^k \cdot a^k \rangle_* = \langle a, [1 - (2a^{k+1} - a^{2k+2})]^{-1} a^{2k+1} \rangle_*$, 当 $k \geq 2^{r-1}$ 时, 由注记 2.1 得 $(2a^{k+1} - a^{2k+2})^2 = a^{4k+4} = 0$ (注意到 $4k+4 \geq 3 \cdot 2^{r-1}$), 故可由引理 1.2 得 $[1 - (2a^{k+1} - a^{2k+2})]^{-1} = 1 + (2a^{k+1} - a^{2k+2})$, 故

$$\begin{aligned}\langle a, 2a^k \rangle_* &= \langle a, [1 + (2a^{k+1} - a^{2k+2})]a^{2k+1} \rangle_* = \\ \langle a, a^{2k+1} + (2a^{3k+2} - a^{4k+3}) \rangle_* &= \\ \langle a, a^{2k+1} \rangle_* \quad (\text{注意到 } a^{3k+2} = 0, a^{4k+3} = 0) &= \\ \langle a, a^{2k+1-2^r+2^r} \rangle_* \quad (\text{注意到 } 2k+1 \geq 2^r+1) &= \\ \langle a, a^{2^r} \cdot a^{2k+1-2^r} \rangle_* &= \langle a, 2a^{2^r-1} \cdot a^{2k+1-2^r} \rangle_* = \\ \langle a, 2a^{2k+1-2^r+2^r-1} \rangle_* &= \langle a, 2a^{2k+1-2^{r-1}} \rangle_* = \\ \langle a, 2a^{2(2k+1-2^{r-1})+1-2^{r-1}} \rangle_* \quad (\text{注意到 } 2k+1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}1 - 2^{r-1} > k \geq 2^{r-1}) &= \dots = \\ \langle a, 2a^{(k+1-2^{r-1})2^{n-1}+2^{r-1}-1} \rangle_* \quad (\text{递推得 } \forall n \geq \\ 1 \text{ 均成立}) &= 0. \quad (\text{注意到 } a \text{ 是幂零元}) \quad \square\end{aligned}$$

3 $K_2(\mathbb{Z}_4C_2)$ 的情形

由文献 [5] 中定理 2.1 知, $K_2(\mathbb{Z}_4C_2) = (C_2)^2$, 再由定理 2.4 得生成元: $\langle 2, 2 \rangle_*, \langle a, 2 \rangle_*$, 于是这 2 个生成元恰为基底。

4 $K_2(\mathbb{Z}_4C_4)$ 的情形

由文献 [5] 中定理 2.2 知, $K_2(\mathbb{Z}_4C_4) = (C_2)^3$, 再由定理 2.4 得生成元: $\langle 2, 2 \rangle_*, \langle a, 2 \rangle_*, \langle a, 2a \rangle_*$, 于是这 3 个生成元恰为基底。

5 $K_2(\mathbb{Z}_4C_8)$ 的情形

由定理 2.4 得生成元: $\langle 2, 2 \rangle_*, \langle a, 2 \rangle_*, \langle a, 2a \rangle_*, \langle a, 2a^2 \rangle_*, \langle a, 2a^3 \rangle_*$ 。考虑映射 $K_2(\mathbb{Z}_4C_8) \rightarrow K_2(\mathbb{Z}_4C_4), \sigma \mapsto \tau$, 其中 σ, τ 分别为 C_8, C_4 的生成元, $K_2(\mathbb{Z}_4C_8)$ 的生成元 $\langle 2, 2 \rangle_*, \langle a, 2 \rangle_*, \langle a, 2a \rangle_*$ 对应到 $K_2(\mathbb{Z}_4C_4)$ 的基, 故 $\langle 2, 2 \rangle_*, \langle a, 2 \rangle_*, \langle a, 2a \rangle_*$ 线性无关, 于是 $K_2(\mathbb{Z}_4C_8)$ 的秩至少为 3, 最多为 5。

参考文献

[1] Chen H, Gao Y B, Tang G D. On the explicit structure of $K_2(\mathbb{F}_pG)$ for G a finite abelian p -group [J]. Journal of Pure and Applied Algebra, 2012, 216 (10): 2130-2136. DOI: 10.1016/j.jpaa.2012.01.013.

[2] Hatcher A. Pseudo-iostopy and $K_2[\mathbb{C}]$ // Bass H. “Classical” Algebraic K-Theory, and Connections with Arithmetic. Berlin: Springer, 1973: 328-336.

[3] Milnor J. Introduction to algebraic K-theory [M]. Princeton, New Jersey: Princeton University Press, 1972.

[4] Keune F. The relativization of K_2 [J]. Journal of Algebra, 1978, 54 (1): 159-177. DOI: 10.1016/0021-8693 (78) 90024-8.

[5] 张亚坤, 唐国平. 一类特殊有限群环的 K_2 -群 [J]. 中国科学院大学学报, 2018, 35 (6): 721-723. DOI: 10.7523/j.issn.2095-6134.2018.06.001.