

文章编号: 2095-6134(2021)06-0735-06

# 混态不确定性关系的实验检验<sup>\*</sup>

王双<sup>1</sup>, 李军利<sup>1</sup>, 王慧<sup>1</sup>, 孟芳霞<sup>1</sup>, 乔从丰<sup>2†</sup>

(1 中国科学院大学材料科学与光电技术学院, 北京 100049; 2 中国科学院大学物理科学学院, 北京 100049)  
(2020 年 7 月 13 日收稿; 2020 年 7 月 31 日收修改稿)

Wang S, Li J L, Wang H, et al. Experimental test of the uncertainty relations for mixed states[J]. Journal of University of Chinese Academy of Sciences, 2021, 38(6): 735-740.

**摘 要** 不确定关系是量子理论的核心内容之一, 体现为不相容物理量的测量不确定性之间存在着此消彼长的内在平衡关系。截至目前, 众多不确定关系在各种物理系统中进行了实验验证, 其中绝大多数实验是在纯态量子系统中进行的。本文在相干光制备的偏振混态系统中对直和形式的控制不等式型不确定关系进行实验研究。通过测量偏振光束的斯托克斯参量, 实验验证混态直和形式不确定关系。结果表明, 所检验的控制不等式不确定关系对于一般的混态系统是最优的。

**关键词** majorization 不确定关系; 相干光; 混态; 斯托克斯参量  
**中图分类号:** O431.2      **文献标志码:** A      **doi:** 10. 7523/j. issn. 2095-6134. 2021. 06. 003

## Experimental test of the uncertainty relations for mixed states

WANG Shuang<sup>1</sup>, LI Junli<sup>1</sup>, WANG Hui<sup>1</sup>, MENG Fangxia<sup>1</sup>, QIAO Congfeng<sup>2</sup>  
(1 College of Materials Science and Opto-Electronic Technology, University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China;  
2 School of Physical Sciences, University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China)

**Abstract** The uncertainty relation lies at the heart of quantum theory and behaves as a trade-off relation between the inherent uncertainties of incompatible observables. Many experiments have been devoted to the test of the various uncertainty relations, where the quantum system are mainly prepared in pure states. Here we present an experimental investigation of the direct sum majorization uncertainty relation for mixed states using the coherent light. By measuring the Stokes parameters of the polarized beams, the direct sum majorization uncertainty relation for general mixed states is verified. The experimental results show that the tested majorization uncertainty relation is optimized for the mixed states.

**Keywords** majorization uncertainty; coherent light; mixed states; stokes parameters

海森堡在用光探测电子位置的假想实验中引入不确定原理的概念, 论述了典型的正则量  $x$  和  $p$  仅能在一个特定的不确定度下才能被同时测定<sup>[1]</sup>。人们最熟悉的不确定关系式<sup>[2]</sup>是如下

<sup>\*</sup> 国家自然科学基金(11635009, 11975236)和中国科学院大学优秀青年教师科研能力提升项目资助  
<sup>†</sup> 通信作者, E-mail: qiaocf@ucas.ac.cn

形式

$$\Delta X^2 \Delta Y^2 \geq \frac{1}{4} |\langle [X, Y] \rangle|^2, \quad (1)$$

其中: 方差  $\Delta X^2 = \langle X^2 \rangle - \langle X \rangle^2$  表征可观测量的不确定度,  $[X, Y] = XY - YX$  是对易子。此后, 熵不确定关系也得到了迅速发展<sup>[3]</sup>。熵作为一种不确定性的度量, 具有在算符本征值重新标记下保持不变的特性。熵不确定关系的典型形式<sup>[4]</sup>为

$$H(\mathbf{p}_X) + H(\mathbf{p}_Y) \geq \log \frac{1}{c}. \quad (2)$$

这里  $H(\mathbf{p}_X) \equiv -\sum_i p_{x_i} \log p_{x_i}$  是测量结果  $x_i$  的概率分布的香农熵(对  $y_i$  亦是如此),  $c = \max_{i,j} |\langle x_i | y_j \rangle|^2$  是  $\mathbf{X}$  和  $\mathbf{Y}$  的本征态的最大重叠量。另外文献<sup>[5]</sup>提出多可观测量下的熵不确定关系。尽管熵函数存在众多不同形式, 如瑞利熵<sup>[6]</sup>, 但对于不确定关系来说, 没有一种熵函数是先验地优于其他熵函数的。由此, 人们又提出控制不等式型的“普适不确定关系”<sup>[7-8]</sup>。在格理论中, 控制不等式型不确定关系存在最优形式<sup>[9]</sup>

$$\mathbf{p}_X \oplus \mathbf{p}_Y < \mathbf{s}, \quad (3)$$

式中向量  $\mathbf{s}$  仅依赖于可观测量  $\mathbf{X}$  和  $\mathbf{Y}$ 。控制不等式  $\mathbf{p} < \mathbf{q}$  的含义是  $\sum_{\mu=1}^k p_{\mu}^{\downarrow} \leq \sum_{\nu=1}^k q_{\nu}^{\downarrow}, \forall k \in \{1, \dots, N\}, k = N$  时等号成立。上标  $\downarrow$  表示将向量的分量按降序排列。

对于不同类型的不确定关系, 如方差、熵或控制不等式, 新的更优形式仍然是量子信息理论中的热点问题<sup>[10]</sup>。尽管已有很多研究, 但是新形式的不确定关系多数未针对混合态进行优化。对于量子比特系统(两维量子系统), 有如下适用于任何混态系统且完整描述不确定性大小的方差型不确定关系<sup>[11]</sup>

$$(p^2 - 1 + \Delta X^2)(p^2 - 1 + \Delta Y^2) \geq (\sqrt{1 - \Delta X^2} \sqrt{1 - \Delta Y^2} - gp^2)^2. \quad (4)$$

这里  $p^2 = 2\text{Tr}[\boldsymbol{\rho}^2] - 1 \in [0, 1]$  表征密度矩阵  $\boldsymbol{\rho}$  的纯度,  $g = \text{Tr}[\mathbf{XY}]/2$ 。在熵不确定关系中, 量子记忆辅助的不确定关系使方程(2)具有如下适用于混态的改进形式<sup>[12]</sup>

$$H(\mathbf{p}_X) + H(\mathbf{p}_Y) \geq \log \frac{1}{c} + S(\boldsymbol{\rho}), \quad (5)$$

其中  $S(\boldsymbol{\rho}) \equiv -\text{Tr}[\boldsymbol{\rho} \log \boldsymbol{\rho}]$  是密度矩阵  $\boldsymbol{\rho}$  的冯诺依曼熵。对于多个可观测量或高维系统, 式(5)可被进一步改进<sup>[13-14]</sup>。但是这些改进在量子比

特系统时退化至方程(5)<sup>[10]</sup>。不同于方差和熵不确定关系, 直和形式的控制不等式型不确定关系最优边界在理论上被证明是存在的<sup>[9]</sup>。在量子比特系统中, 最优边界有如下形式<sup>[9]</sup>

$$\mathbf{p}_X \oplus \mathbf{p}_Y < \mathbf{s}(\boldsymbol{\rho}) = \lambda_2 \mathbf{s}^{\downarrow} + \lambda_1 \mathbf{s}^{\uparrow}. \quad (6)$$

这里  $\lambda_1 \leq \lambda_2$  是密度矩阵  $\boldsymbol{\rho}$  的 2 个本征值, 上标  $\uparrow$  表示对向量分量进行升序排列。

实验方面, 文献<sup>[15]</sup>在自发参量下转换(spontaneous parametric down conversion, SPDC)的单光子源系统中, 验证了下限依赖于被测量子态及其正交态的一种较为紧致的方差型不确定关系。基于相同单光子技术, 人们在量子比特系统<sup>[16-17]</sup>或者高维系统<sup>[18]</sup>中检验了多个可观测量下的改进型不确定关系, 以及同时包含上下限的不确定关系<sup>[19]</sup>。利用熵函数<sup>[20]</sup>和洛伦兹曲线<sup>[21]</sup>等, 控制不等式型不确定关系也在 SPDC 光源下进行了验证。金刚石色心是另一种单光子源, 可以被用作量子比特或量子三态(qutrit)系统。在该系统中, 人们对基于量子比特系统的三可观测量的方差型不确定关系<sup>[22]</sup>和适用于多个可观测量的熵不确定关系<sup>[23]</sup>进行了验证。不同于单量子系统, 我们利用相干光源对方差不确定关系和控制不等式型不确定关系同时进行实验验证<sup>[24]</sup>。

尽管在纯态的实验研究上已有众多实验, 但文献中未见专门针对混态的不确定关系的实验研究。只在最近, 文献<sup>[25]</sup>利用中子自旋混态对类似于式(4)的方差型不确定关系和相关的熵不确定关系进行了验证。本文展示一个利用相干光检验混态下控制不等式型不确定关系的实验研究。我们使用分束器对两束波长不同的相干光合束, 从而获得指定混度下的偏振混态密度矩阵。通过对该混态系统的斯托克斯(Stokes)参量的测量, 实验验证了直和控制不等式型不确定关系在混态下是最优的。

## 1 理论预测

分别用  $|H\rangle$  和  $|V\rangle$  标记光的水平偏振和垂直偏振态, 则另外两对正交基矢为  $|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle + |V\rangle)$ ,  $|-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle - |V\rangle)$  和  $|L\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle + i|V\rangle)$ ,  $|R\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle - i|V\rangle)$ 。

光源的偏振可以通过由光强定义的 4 个斯托克斯参量<sup>[26]</sup>来表征:

$$\begin{aligned} S_0 &= I_H + I_V = \mathcal{N}(\langle \mathbf{H} | \hat{\boldsymbol{\rho}} | \mathbf{H} \rangle + \langle \mathbf{V} | \hat{\boldsymbol{\rho}} | \mathbf{V} \rangle), \\ S_1 &= I_H - I_V = \mathcal{N}(\langle \mathbf{H} | \hat{\boldsymbol{\rho}} | \mathbf{H} \rangle - \langle \mathbf{V} | \hat{\boldsymbol{\rho}} | \mathbf{V} \rangle), \\ S_2 &= I_+ - I_- = \mathcal{N}(\langle + | \hat{\boldsymbol{\rho}} | + \rangle - \langle - | \hat{\boldsymbol{\rho}} | - \rangle), \\ S_3 &= I_R - I_L = \mathcal{N}(\langle \mathbf{R} | \hat{\boldsymbol{\rho}} | \mathbf{R} \rangle - \langle \mathbf{L} | \hat{\boldsymbol{\rho}} | \mathbf{L} \rangle), \end{aligned}$$

其中:  $I_i = \mathcal{N} \langle i | \hat{\boldsymbol{\rho}} | i \rangle$  代表在相应基矢下测得的光强,  $\mathcal{N}$  是总光强效率因子。定义  $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_1 = | \mathbf{H} \rangle \langle \mathbf{H} | - | \mathbf{V} \rangle \langle \mathbf{V} |$ ,  $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_2 = | \mathbf{H} \rangle \langle \mathbf{V} | + | \mathbf{V} \rangle \langle \mathbf{H} |$ ,  $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_3 = i(| \mathbf{H} \rangle \langle \mathbf{V} | - | \mathbf{V} \rangle \langle \mathbf{H} |)$ , 那么光的偏振态可以用斯托克斯参量描述<sup>[27]</sup>

$$\boldsymbol{\rho} = \frac{\hat{\boldsymbol{\rho}}}{\text{Tr}[\hat{\boldsymbol{\rho}}]} = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^3 \frac{S_i}{S_0} \hat{\boldsymbol{\sigma}}_i. \quad (7)$$

这里  $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_0 = 1$  是单位矩阵而  $\boldsymbol{\rho}$  就是归一化的偏振态。令  $\boldsymbol{\sigma}_z = \hat{\boldsymbol{\sigma}}_1$ ,  $\boldsymbol{\sigma}_y = -\hat{\boldsymbol{\sigma}}_3$ ,  $\boldsymbol{\sigma}_x = \hat{\boldsymbol{\sigma}}_2$ , 有  $\{ | \mathbf{H} \rangle, | \mathbf{V} \rangle \}$  基下的泡利 (Pauli) 算符:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}_z &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\sigma}_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \\ \boldsymbol{\sigma}_x &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (8)$$

在偏振态  $\boldsymbol{\rho}$  下泡利算符的期望值为

$$\langle \boldsymbol{\sigma}_x \rangle = \frac{S_2}{S_0}, \langle \boldsymbol{\sigma}_y \rangle = \frac{-S_3}{S_0}, \langle \boldsymbol{\sigma}_z \rangle = \frac{S_1}{S_0}. \quad (9)$$

考虑如下 2 个可观测量  $\mathbf{Z}$  和  $\mathbf{X}$ :

$$\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (10)$$

$$\mathbf{X}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}, \quad (11)$$

其中:  $\mathbf{Z} = \boldsymbol{\sigma}_z$ ,  $\mathbf{X}(\theta) = \sin \theta \boldsymbol{\sigma}_x + \cos \theta \boldsymbol{\sigma}_z$ ,  $\theta \in (0, \frac{\pi}{2}]$ , 而对易子  $[ \mathbf{Z}, \mathbf{X}(\theta) ] = 2 \sin \theta \boldsymbol{\sigma}_y$ 。对于

一个二维的量子比特系统, 当测量一个可观测量如  $\boldsymbol{\sigma}_z$  时, 以  $p_{z\pm}$  来标记得到  $\pm 1$  值的概率。 $\boldsymbol{\sigma}_z$  的期望值由  $\langle \boldsymbol{\sigma}_z \rangle = p_{z+} - p_{z-}$  计算。由概率归一化 ( $p_{z+} + p_{z-} = 1$ ) 结合期望值与斯托克斯参量关系式 (12), 有

$$p_{z\pm} = \frac{1 \pm \langle \boldsymbol{\sigma}_z \rangle}{2} = \frac{S_0 \pm S_1}{2S_0}. \quad (12)$$

类似地, 可以得到其他可观察量的测量概率分布。对于式 (10)、式 (11) 的可观测值  $\mathbf{Z}$  和  $\mathbf{X}(\theta)$ , 控制不等式型不确定关系为

$$\mathbf{p}_Z \oplus \mathbf{p}_{X(\theta)} \leq \mathbf{s}(\boldsymbol{\rho}) = \lambda_2 \mathbf{s}^\downarrow + \lambda_1 \mathbf{s}^\uparrow. \quad (13)$$

这里  $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2)$  是偏振态  $\boldsymbol{\rho}$  的本征值,  $\mathbf{s} = (1, \cos \frac{\theta}{2}, 2 \sin^2 \frac{\theta}{4}, 0)$ 。代入斯托克斯参量, 不等式 (13) 变为

$$\begin{aligned} \frac{1}{2S_0} \left[ \begin{pmatrix} S_0 + S_1 \\ S_0 - S_1 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} S_0 + S(\theta) \\ S_0 - S(\theta) \end{pmatrix} \right] \\ < \lambda_2 \mathbf{s}^\downarrow + \lambda_1 \mathbf{s}^\uparrow, \end{aligned} \quad (14)$$

其中  $S(\theta) = \cos \theta S_1 + \sin \theta S_2$ 。这是我们将要实验验证的不确定关系 (6) 的等价表示。

## 2 实验过程

实验装置如图 1 所示, 808 nm 的相干光功率为 0.36 mW, 780 nm 的相干光功率根据目标态在 0.36~1.44 mW 之间调节。两束光从两路经过波片组 (半波片 H1/H2、偏振片 P1/P2 和 1/4 波片 Q1/Q2) 以进行偏振态的制备。其中半波片和 1/4 波片的波长范围是 (800±25) nm, 极化片的波长范围是 600~1100 nm。功率计对 780 和 808 nm 的光响应效率分别为 5.46 和 5.9 mA/W, 对两种波长的相干光的实际使用功率均小于 2 mW, 光响应效率造成的影响可忽略不计。

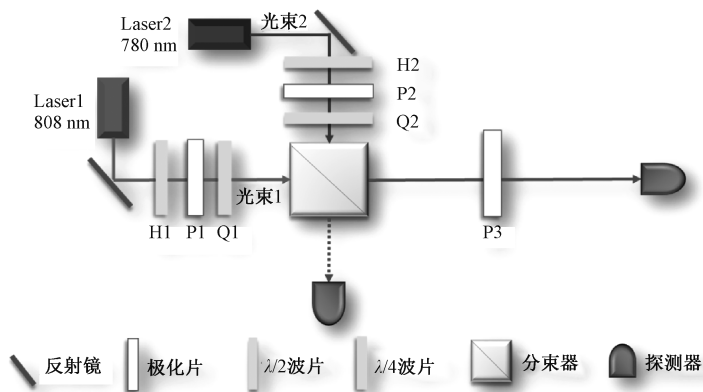


图 1 实验光路图

Fig. 1 Experimental setup

808 nm 相干光制备为  $|\psi\rangle = \cos\alpha |H\rangle + \sin\alpha |V\rangle$ , 780 nm 相干光制备为  $|\psi^\perp\rangle (\langle\psi^\perp|\psi\rangle = 0)$ 。两束相干光在 50/50 分束器中合束。在输出端口,探测器光强之间有以下关系

$$I_D = I_{\omega_1} + I_{\omega_2}, \tag{15}$$

$$I_D(\mathbf{X}) = I_{\omega_1} |\langle x|\psi\rangle|^2 + I_{\omega_2} |\langle x|\psi^\perp\rangle|^2. \tag{16}$$

其中:  $I_{\omega_i}$  是光束  $i$  在探测器处的光强,而  $|x\rangle$  是探测器之前的偏振片的透光方向,参见图 1。利用  $I_{\omega_1} + I_{\omega_2} = \text{Tr}[I_{\omega_1} |\psi\rangle\langle\psi| + I_{\omega_2} |\psi^\perp\rangle\langle\psi^\perp|]$ , 式(16)可以自然地导出

$$\frac{I_D(\mathbf{X})}{I_D} = \text{Tr}[|x\rangle\langle x|\boldsymbol{\rho}] := p_x, \tag{17}$$

其中  $\boldsymbol{\rho} \equiv (I_{\omega_1} |\psi\rangle\langle\psi| + I_{\omega_2} |\psi^\perp\rangle\langle\psi^\perp|)/I_D$  是一个归一化偏振态,而  $p_x$  即为相应偏振测量概率。于是获得如下偏振混态:

$$\rho(\lambda_1, \alpha) = \boldsymbol{\rho} = \lambda_1 |\psi\rangle\langle\psi| + \lambda_2 |\psi^\perp\rangle\langle\psi^\perp|. \tag{18}$$

此处  $\lambda_1 = I_{\omega_1}/I_D, \lambda_1 + \lambda_2 = 1$ 。注意,这里并不能通过对 2 个独立光源的偏振态  $|\psi\rangle$  和  $|\psi^\perp\rangle$  分别测量,然后将测量所得概率分布以权重  $\lambda_1$  和  $\lambda_2$  相加的形式来获得混态下不确定关系的测定。这是因为,分开的独立测量将是对 2 个不同希尔

伯特空间中的物理量进行的,它们之间没有相应的对易关系。

实验中,由于激光本身具有偏振,在偏振器(P1,2)之前放置半波片(H1,2)起到与衰减器相同的作用,用于控制进入分束器的两束光的光强比。1/4 波片(Q1,2)用于补偿由分束器(BS)引起的偏振变化,参见图 1。首先对式(15)和式(16)进行检验,见图 2。图 2(a)表示极化片 P3 不存在时光束 1 和 2 的单路探测光强与总探测光强之间的关系。测量中两路光束的偏振分别为  $|H\rangle$  和  $|V\rangle$ ,探测器处相应强度为  $(I_{\omega_1}, I_{\omega_2}, I_D)$  的坐标点落于  $z = z_0 + ax + by$  平面(其中  $z_0 \approx 0, a \approx b \approx 1$ )。图 2(b)表示表示极化片 P3 存在时,单路光强  $I_{\omega_1}(\mathbf{X}) = I_{\omega_1} |\langle x|\psi\rangle|^2$  和  $I_{\omega_2}(\mathbf{X}) = I_{\omega_2} |\langle x|\psi^\perp\rangle|^2$  与总光强  $I_D(\mathbf{X})$  之间的线性关系。这里  $\mathbf{X}$  表示偏振测量方向,由极化片 P3 的方向确定。同样光束 1 和 2 的偏振分别为  $|H\rangle$  和  $|V\rangle$ ,极化片 P3 的方向取  $0^\circ, 22.5^\circ, 30^\circ, 37.5^\circ, 45^\circ, 90^\circ, 97.5^\circ, 120^\circ, 135^\circ$ 。探测强度  $I_{\omega_1}(\mathbf{X}), I_{\omega_2}(\mathbf{X}), I_D(\mathbf{X})$  为坐标的点落于  $z = z'_0 + a'x + b'y$  平面(其中  $z'_0 \approx 0, a' \approx b' \approx 1$ )。式(15)和式(16)的实验验证表明透过分束器后的光束偏振态可由式(18)来描述。

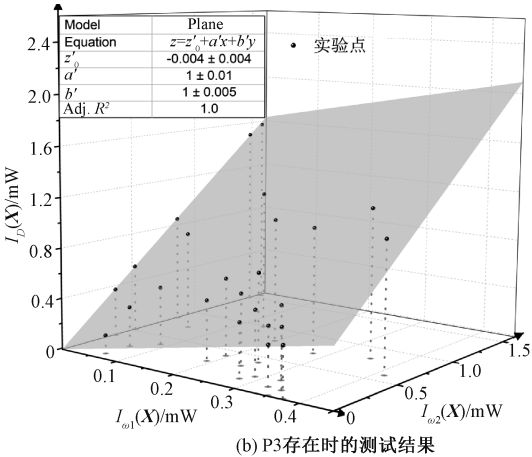
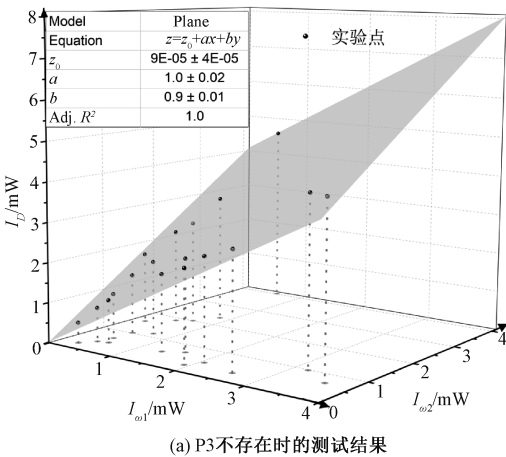


图 2 混态测试结果  
Fig. 2 Test results of mixed states

3 实验结果分析

基于实验装置以及式(18),制备一系列偏振混态  $\rho(\lambda_1, \alpha)$ , 其中,对每一个偏振量  $\alpha \in \{0, \frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{12}\}$  其混度分布制备为  $\lambda_1 \in 0,$

$0.2, 0.3, 0.4, 0.5\}$ 。实际选取 6 对可观测量  $\mathbf{Z}$  和  $\mathbf{X}(\theta), \theta \in \{\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{12}, \frac{\pi}{2}\}$  进行实验检验。通过公式  $F(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}_1) = \text{tr}(\boldsymbol{\rho}\boldsymbol{\rho}_1) + \sqrt{1 - \text{Tr}(\boldsymbol{\rho}^2)} \times \sqrt{1 - \text{Tr}(\boldsymbol{\rho}_1^2)}$  [28], 计算出所制备态的保真度大于

98%。功率计的响应时间为  $1\ \mu\text{s}$ ,分辨率为  $100\ \text{pW}$ ,足以识别待测光强度的变化。 $\mathbf{Z} = \sigma_z$  和  $\mathbf{X}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sigma_x + \sigma_z)$  的实验测量值绘制成图后如图 3。图 3 中偏振态的参量取值为  $\lambda_1 \in \{0, 0.2, 0.3, 0.5\}$  和  $\alpha \in \left\{0, \frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{12}\right\}$ 。量子理论对观测量  $\mathbf{Z}$  和  $\mathbf{X}\left(\frac{\pi}{4}\right)$  预言的控制不等式型不确定关系为

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_Z \oplus \mathbf{p}_{\mathbf{X}\left(\frac{\pi}{4}\right)} < \mathbf{s}(\rho) = \lambda_2 \mathbf{s}^\downarrow + \lambda_1 \mathbf{s}^\uparrow \\ = \begin{pmatrix} \lambda_2 \\ (\lambda_2 - \lambda_1) \cos \frac{\pi}{8} + \lambda_1 \\ (\lambda_1 - \lambda_2) \cos \frac{\pi}{8} + \lambda_2 \\ \lambda_1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{19}$$

控制不等式“ $<$ ”可以通过洛伦兹曲线来准确表示。矢量  $\mathbf{s}$  的洛伦兹曲线定义为折线函数  $f(n) \equiv$

$\sum_{i=0}^n \mathbf{s}_i^\downarrow$ , 这里额外的  $i=0$  分量取 0 值。关系式  $\mathbf{q} < \mathbf{p}$  当且仅当向量  $\mathbf{p}$  的洛伦兹曲线完全包裹向量  $\mathbf{q}$  的洛伦兹曲线时成立。洛伦兹曲线已在文献 [24] 中被用于检验纯态的控制不等式型不确定关系。从图 3 的实验结果可以看出:1)  $\lambda_2 \mathbf{s}^\uparrow + \lambda_1 \mathbf{s}^\downarrow$  的洛伦兹曲线完全包裹了所测混态  $\rho(\lambda_1, \alpha)$  下可观测测量  $\mathbf{Z}$  和  $\mathbf{X}\left(\frac{\pi}{4}\right)$  的测量概率分布向量的洛伦兹曲线, 所以式 (19) 是正确的;2) 边界  $\lambda_2 \mathbf{s}^\uparrow + \lambda_1 \mathbf{s}^\downarrow$  的洛伦兹曲线上存在数据点, 因此式 (19) 是最优的;3) 当偏振状态的极化度(纯度)降低时, 即  $\lambda_1$  趋于 0.5 时, 洛伦兹曲线越来越扁平直至趋于一条线(图 3(d))。对其他观测测量和偏振态的测量具有类似结果, 因此边界向量  $\mathbf{s}(\rho)$  对应的洛伦兹曲线对混态的可观测量的概率分布向量所对应的洛伦兹曲线的包裹是紧的。在  $\lambda_1 = 0.5$  时, 所有曲线全部重合, 实验点也很好地落在了理论曲线上。这样的结果, 表明优化不确定关系对于不同混度的混态都是最优的。

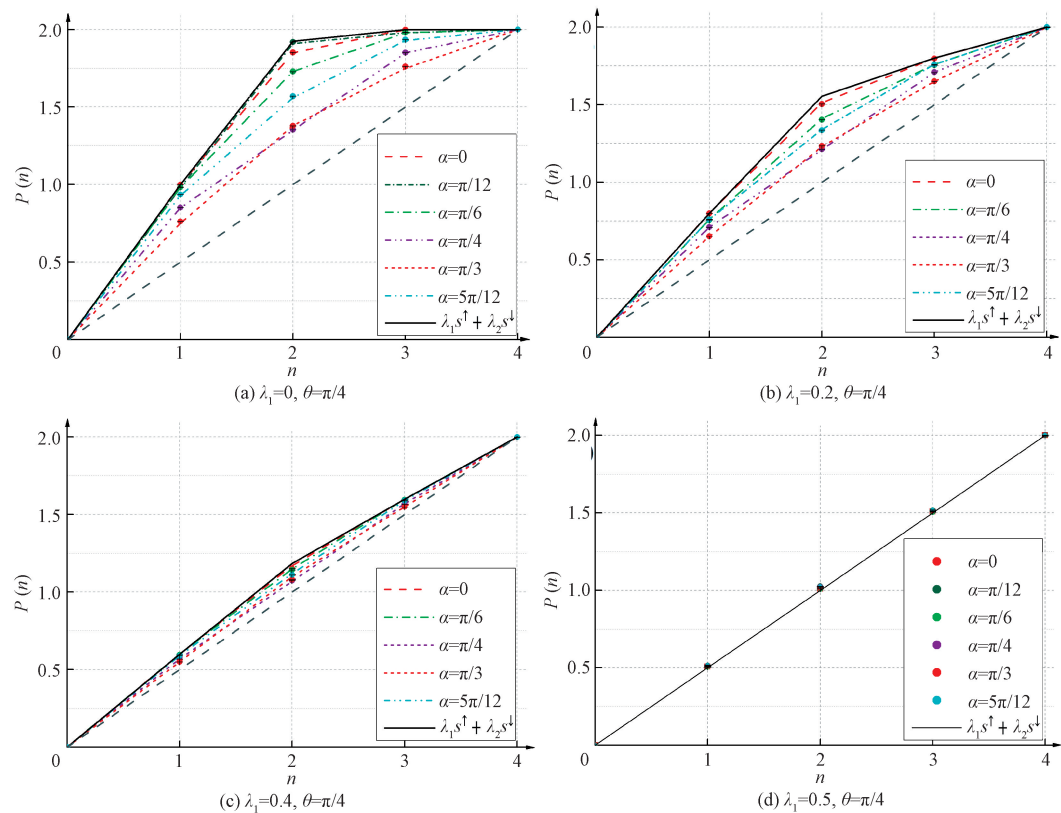


图 3 可观测测量  $\mathbf{Z}$  和  $\mathbf{X}\left(\frac{\pi}{4}\right)$  在偏振混态下的控制不等式型不确定关系的实验测量

Fig. 3 Experimental measurement of the majorization uncertainty relation of observables  $\mathbf{Z}$  and  $\mathbf{X}\left(\frac{\pi}{4}\right)$  in polarization mixed states



## 4 总结

本文利用相干光制备的量子比特系统对混态情况下的控制不等式型不确定关系进行实验验证。通过将两束不同频率的相干态光进行合束,提出制备指定偏振混态的简易方法,并对其进行实验验证。通过所得偏振混态对不相容物理量进行实验测量,通过测量概率分布矢量洛伦兹曲线的方式实验验证控制不等式型不确定关系。实验结果表明,在各种混度的偏振态下,由格理论所得的控制不等式型量子不确定关系的边界都是最优的,即混态控制不等式型关系的最优性首次在量子比特系统得到了实验证实。由于准经典光学中混态易于制备,我们的实验还为在更一般的(非纯态)量子系统中进一步检验广义测量(positive operator-valued measure, POVM)的不相容性、量子互文性等量子特性提供了基础。随着激光技术的飞速发展,用相干光对非经典效应进行实验测试必将进一步加深对量子不确定关系的理解及其在高精度测量中的应用。

## 参考文献

- [1] Heisenberg W. Über den anschaulichen Inhalt der quantentheoretischen Kinematik und Mechanik [J]. Zeit Phys, 1927, 43: 172-198.
- [2] Robertson H P. The uncertainty principle [J]. Phys Rev, 1929, 34: 163-164.
- [3] Deutsch D. Uncertainty in quantum measurements [J]. Physical Review Letters, 1983, 50(9): 631-633.
- [4] Maassen H, Uffink J B M. Generalized entropic uncertainty relations [J]. Phys Rev Lett, 1988, 60: 1103-1106.
- [5] Liu S, Mu L Z, Fan H. Entropic uncertainty relations for multiple measurements [J]. Phys Rev A, 2015, 91: 042133.
- [6] Zozor S, Bosyk G M, Portesi M. On a generalized entropic uncertainty relation in the case of the qubit [J]. Phys A: Math Theor, 2013, 46: 465301.
- [7] Friedland S, Gheorghiu V, Gour G. Universal uncertainty relations [J], Phys Rev Lett, 2013, 111: 230401.
- [8] Puchała Z, Rudnicki Ł, Życzkowski K. Majorization entropic uncertainty relations [J]. Phys A: Math Theor, 2013, 46: 272002.
- [9] Li J L, Qiao C F. The optimal uncertainty relation [J]. Ann Phys (Berlin), 2019, 531: 1970036.
- [10] Coles P J, Berta M, Tomamichel M, et al. Entropic uncertainty relations and their applications [J]. Rev Mod Phys, 2017, 89: 015002.
- [11] Li J L, Qiao C F. Reformulating the quantum uncertainty relation [J]. Sci Rep, 2015, 5: 12708.
- [12] Berta M, Christandl M, Colbeck R, et al. The uncertainty principle in the presence of quantum memory [J]. Nat Physics, 2010, 6: 659-662.
- [13] Wang D, Ming F, Hu M L, et al. Quantum-memory-assisted entropic uncertainty relations [J]. Ann Phys (Berlin), 2019, 531: 1900124.
- [14] Ming F, Wang D, Fan X G, et al. Improved tripartite uncertainty relation with quantum memory [J]. Phys Rev A, 2020, 102: 012206.
- [15] Wang K, Zhan X, Bian Z, et al. Experimental investigation of the stronger uncertainty relations for all incompatible observables [J]. Phys Rev A, 2016, 93: 052108.
- [16] Chen Z X, Li J L, Song Q C, et al. Experimental investigation of multi-observable uncertainty relations [J]. Phys Rev A, 2017, 96: 062123.
- [17] Chen Z X, Wang H, Li J L, et al. Tight  $N$ -observable uncertainty relations and their experimental demonstrations [J]. Sci Rep, 2019, 9: 5687.
- [18] Fan B W, Wang K K, Xiao L, et al. Experimental test of a stronger multiobservable uncertainty relation [J]. Phys Rev A, 2018, 98: 032118.
- [19] Xiao L, Fan B W, Wang K K, et al. Direct experimental test of forward and reverse uncertainty relations [J]. Phys Rev Research, 2020, 2: 023106.
- [20] Yuan Y, Xiao Y, Hou Z, et al. Experimental investigation of majorization uncertainty relations in the high-dimensional systems [J]. arXiv preprint arXiv:1901.00853, 2019.
- [21] Yuan Y, Xiao Y L, Hou Z B, et al. Strong majorization uncertainty relations: theory and experiment [J]. arXiv preprint arXiv:1912.13383, 2019.
- [22] Ma W C, Chen B, Liu Y, et al. Experimental demonstration of uncertainty relations for the triple components of angular momentum [J]. Phys Rev Lett, 2017, 118: 180402.
- [23] Xing J, Zhang Y R, Liu S, et al. Experimental investigation of quantum entropic uncertainty relations for multiple measurements in pure diamond [J]. Sci Rep, 2017, 7: 2563.
- [24] Wang H, Li J L, Wang S, et al. Experimental investigation of the uncertainty relations with coherent light [J]. Quant Inf Process, 2019, 19: 38.
- [25] Sponar S, Danner A, Obigane K, et al. Experimental test of tight state-independent preparation uncertainty relations for qubits [J]. Phys Rev A, 2020, 102(4): 042204.
- [26] Saleh B E A, Teich M C. Fundamentals of photonics [M]. 2nd ed. Hoboken, New Jersey: Wiley-Interscience, 2007: 195-203.
- [27] James D F V, Kwiat P G, Munro W J, et al. Measurement of qubits [J]. Phys Rev A, 2001, 64: 052312.
- [28] Wang X G, Yu C S, Yi X X. An alternative quantum fidelity for mixed states of qudits [J]. Phys Lett A, 2008, 373(1): 58-60.